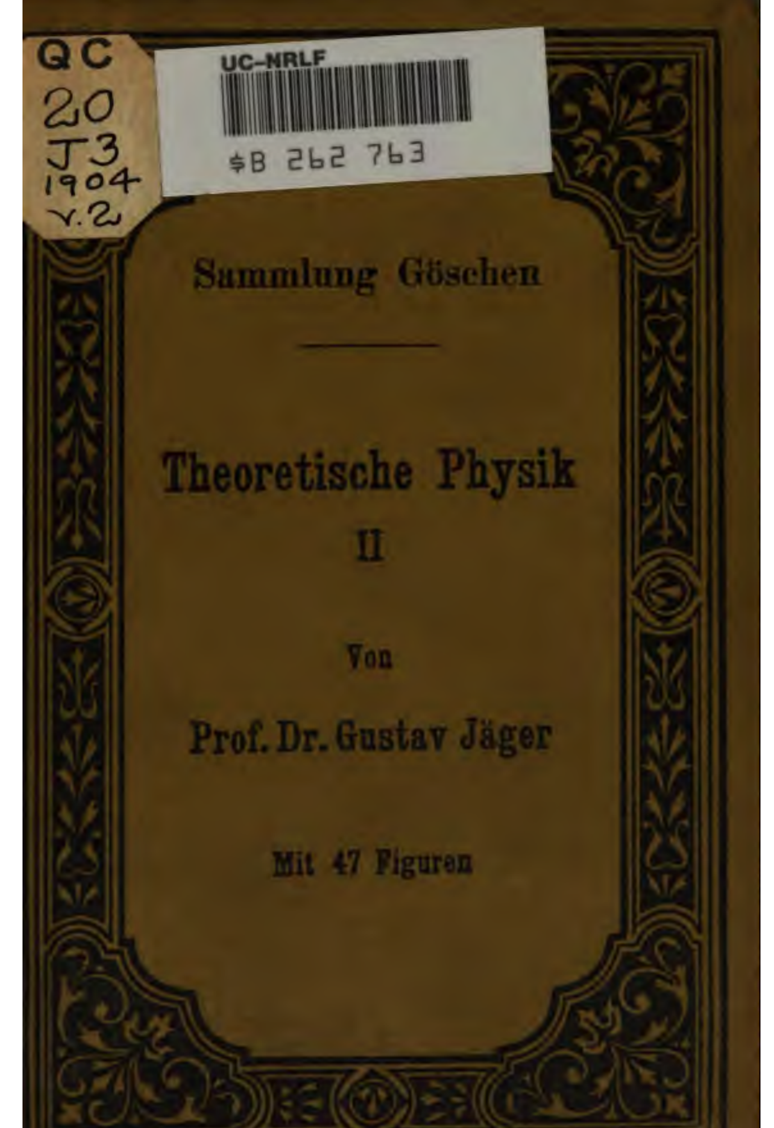


QC
20
J3
1904
v.2
UC-NRLF
$B 262 763
Sammlung Göschen
Theoretische Physik
II
Von
Prof. Dr. Gustav Jäger
Mit 47 Figuren

# Kleine Bibliothek zur Physik

**aus der Sammlung Göschen.**

Jedes Bändchen eleg. in Leinwand gebunden **80 Pfennig.**

---

**Geschichte der Physik** von A. Kistner, Professor an der Großherzoglichen Realschule zu Sinsheim a. E. I: Die Physik bis Newton ... 293.

... r Gegen-

... k. Von ... it Wien.

... lungen.

... 33 Ab-

... iguren.

Vom 1. Januar 1913 ab beträgt der Preis der Sammlung Göschen 90 Pf. für den Band

---

**Physikalische Messungsmethoden** von Dr. Wilhelm Bahrdt, Oberlehrer an der Oberrealschule in Groß-Lichterfelde. Mit 49 Figuren. Nr. 301.

---

**Physikalische Aufgabensammlung** von G. Mahler, Professor am Gymnasium in Ulm. Mit den Resultaten. Nr. 243.

---

**Physikalische Formelsammlung** von G. Mahler, Professor am Gymnasium in Ulm. Nr. 136.

---

Weitere Bände sind in Vorbereitung.

Sammlung Göschen



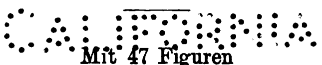
# Theoretische Physik

## II

## Licht und Wärme

von

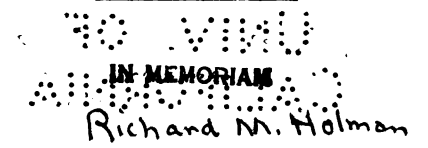
**Dr. Gustav Jäger**
Professor der Physik an der Universität Wien



Mit 47 Figuren

Dritte, verbesserte Auflage
Neudruck

Leipzig
G. J. Göschen'sche Verlagshandlung
1907




Spamersche Buchdruckerei, Leipzig.

# Inhaltsverzeichnis.

Seite

## Die Lehre vom Licht.

Seite

## Die Lehre von der Wärme.

### Wärmeleitung.



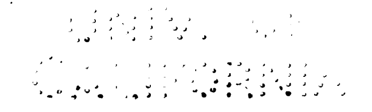
### Mechanische Wärmetheorie.



### Die kinetische Theorie der Gase.



---



# Die Lehre vom Licht.

## § 1. Geradlinige Fortpflanzung des Lichts — Beleuchtung — Photometrie.

In der Lehre vom Licht, der Optik, behandeln wir die außerhalb unseres Auges liegenden Ursachen der Lichterscheinungen. Es ist hier ähnlich wie bei den Schallerscheinungen (Bd. I). Wie wir dort als die Ursache des Schalls einen schwingenden Körper annahmen, der seine Bewegungen auf die Luft überträgt, die sie dann an unser Ohr abgibt, so müssen wir hier die Ursache des Lichts ebenfalls in Bewegungszuständen der kleinsten Teilchen eines Körpers suchen. Damit diese Bewegung fortgepflanzt werden kann, ist es aber nötig, die Voraussetzung zu machen, daß der ganze Raum mit einem sehr feinen Stoff, dem sogenannten Lichtäther, angefüllt ist, den wir als Träger des Lichts ansehen. Auf diese Weise gelangt das Licht in unser Auge und bewirkt die Gesichtsempfindungen.

Aus dieser Auffassungsweise ergibt sich sofort, daß sich das Licht ebenso wie der Schall, wenn das Fortpflanzungsmedium überall gleichartig beschaffen ist, wegen der allseitigen Symmetrie nur geradlinig fortpflanzen kann, wie es ja auch die Erfahrung bestätigt.

Die Lichtmenge, welche die Flächeneinheit eines Körpers von einem leuchtenden Körper erfährt, können

wir die Beleuchtungsstärke nennen. Ist die Lichtquelle punktförmig, so wird jede Kugelfläche, welche wir um den leuchtenden Punkt als Mittelpunkt schlagen, gleichviel Licht empfangen. Daraus geht ohne weiteres hervor, daß die Beleuchtungsstärke verkehrt proportional dem Quadrat der Entfernung des beleuchteten Körpers von der Lichtquelle sein muß.

Aber es ist auch nicht gleichgültig, ob das Licht senkrecht oder schief die Oberfläche des beleuchteten Körpers trifft. Nennen wir den Winkel der Flächennormale mit dem auffallenden Lichtstrahl $\alpha$, so ist leicht ersichtlich, daß die Beleuchtungsstärke dem $\cos\alpha$ proportional ist, da sich ja das Licht auf einen um so kleineren Raum zusammendrängt, je kleiner der Winkel $\alpha$ ist. Wir können demnach für die Beleuchtungsstärke B einer ebenen Fläche die Formel

$$B = \frac{C \cos\alpha}{r^2}$$

aufstellen, wenn r die Entfernung der Lichtquelle von der beleuchteten Fläche ist.

Die Größe C hängt nur von der Natur der Lichtquelle ab. Hiefür lehrt nun die Erfahrung, daß auch die Menge des ausgesandten Lichts dem Kosinus des Winkels $\beta$ proportional ist, welchen der ausgesandte Strahl mit der Normalen jenes Flächenstücks einschließt, von wo er seinen Ausgang nimmt. Die Beleuchtungsstärke wird sich daher durch folgende Gleichung darstellen lassen:

$$B = \frac{L \cos\alpha \cos\beta}{r^2},$$

wobei wir L die Lichtstärke der Flächeneinheit des leuchtenden Körpers nennen können.

Durch die Wahl der Entfernung der Lichtquelle und der Neigung des auffallenden Lichts ist es leicht, eine Beleuchtung von bestimmter Stärke herzustellen. Es beruht darauf die Vergleichung der Intensitäten verschiedener Lichtquellen, die Photometrie.

## § 2. Reflexionsgesetze ebener Spiegel.

Einen sehr dünnen Lichtkegel nennt man ein Strahlenbündel. Denken wir uns den Lichtkegel unendlich dünn, so haben wir einen Lichtstrahl. Es ist vorteilhaft, diese Begriffe zur bequemen Darstellung des Gangs des Lichts einzuführen.

Trifft ein Lichtstrahl auf eine glatte Fläche, so wird er nach bestimmten Gesetzen, den Reflexionsgesetzen, zurückgeworfen. Es sei AB (Fig. 1) eine Ebene.

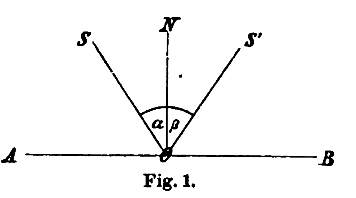



Fig. 1.

Im Punkt O treffe ein Lichtstrahl SO auf. Wir nennen ihn den einfallenden Strahl, O den Einfallspunkt. Im Einfallspunkt errichten wir die Normale ON zur Ebene AB. Sie heißt das Einfallslot. Der Winkel zwischen einfallendem Strahl und Einfallslot sei $\alpha$, es ist der Einfallswinkel. Der Reflexionswinkel $\beta$ ist der Winkel zwischen dem Einfallslot und dem reflektierten Strahl OS'.

Es gelten nun für die Reflexion folgende Gesetze:

1. Einfallender Strahl, Einfallslot und reflektierter Strahl liegen in einer Ebene.

2. Der Einfallswinkel ist gleich dem Reflexionswinkel, $\alpha = \beta$.

Treffen demnach von einem leuchtenden Punkt S (Fig. 2) Strahlen auf eine glatte ebene Fläche AB, so werden sie so zurückgeworfen, daß sie nach rückwärts verlängert sich alle im Punkt S′ vereinigen würden. Für ein beobachtendes Auge scheinen demnach die reflektierten Strahlen aus dem Punkt S′ zu kommen, es

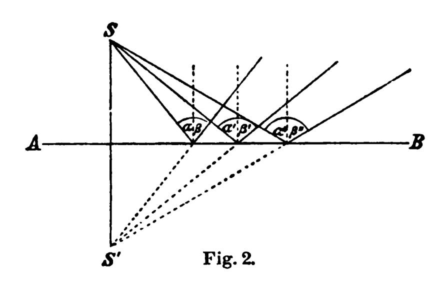



Fig. 2.

ist S′ ein Bild von S. AB ist also eine spiegelnde Fläche, ein ebener Spiegel. Ein solcher entwirft Bilder, welche dieselbe Größe wie der Gegenstand haben und zu ihm symmetrisch liegen. Die Spiegelfläche bildet dabei die Symmetrieebene.

## § 3. Kugelspiegel — Gegenstands- und Bildweite — Brennpunkt.

Der leuchtende Punkt S (Fig. 3) sende Strahlen auf eine polierte Kugelfläche KK′. Den Strahl SA, welcher durch den Mittelpunkt O der Kugel geht, nennen wir den Hauptstrahl. Jedes Lot auf die Spiegelfläche geht durch O. Es ist daher OM das Einfallslot für den Strahl SM. Der reflektierte Strahl MB schneidet den Hauptstrahl in B. Dort muß ein Bild des Punktes S entstehen, da alle Strahlen, welche in einem Kreis um

A herum auftreffen, sich im Punkt B vereinigen. In B ist demnach wiederum die Ausgangsstelle von unendlich vielen Strahlen.

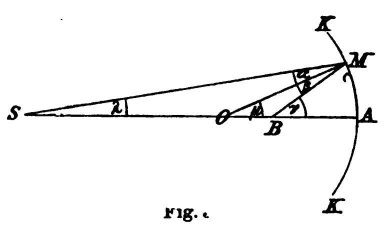



Fig. 2.

Wir wollen den Einfalls- und Reflexionswinkel mit den gewohnten Buchstaben $\alpha$ bezgl. $\beta$ bezeichnen. Ferner seien die Winkel

$$\mathrm{ASM} = \lambda\,, \quad \mathrm{AOM} = \mu\,, \quad \mathrm{ABM} = \nu$$

und die Strecken

$$\mathrm{AS} = \mathrm{a}\,, \quad \mathrm{AB} = \mathrm{b}\,, \quad \mathrm{AO} = \mathrm{OM} = \mathrm{r}\,.$$

a nennen wir die Gegenstandsweite, b die Bildweite. r ist der Radius der Kugel. Es gelten nun folgende Beziehungen:

$$\alpha = \mu - \lambda\,,$$
$$\beta = \nu - \mu\,,$$
$$\alpha = \beta = \mu - \lambda = \nu - \mu\,,$$

daher

$$\lambda + \nu = 2\,\mu\,. \tag{1}$$

Wir setzen voraus, daß M nahe bei A liege, daß also die Winkel $\alpha$, $\beta$, $\lambda$, $\mu$, $\nu$ klein seien. Wir haben dann

$$\mathrm{AM} = \mathrm{a}\,\lambda = \mathrm{r}\,\mu = \mathrm{b}\,\nu$$

und nach Gleichung (1)

$$\frac{\mathrm{AM}}{\mathrm{a}} + \frac{\mathrm{AM}}{\mathrm{b}} = \frac{2\,\mathrm{AM}}{\mathrm{r}}\,,$$

oder

$$(2) \qquad \frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{2}{r}.$$

Diese Gleichung drückt die Beziehung zwischen Gegenstands- und Bildweite aus.

Kommen die Strahlen aus dem Unendlichen, d. h. fallen auf unsern Spiegel **parallele Strahlen**, so wird für $a = \infty$ $b = \frac{r}{2}$. Als parallele Strahlen können wir die Sonnenstrahlen auffassen. Da dieselben gleichzeitig wärmen, so wird im Punkt

$$p = \frac{r}{2}$$

eine hohe Temperatur erzeugt, weshalb dieser Punkt auch der **Brennpunkt** genannt wird, während p die **Brennweite** heißt. Mit Benutzung dieser Größe können wir Gleichung (2) auch

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{p}$$

schreiben. Liegt der leuchtende Punkt im Mittelpunkt der Kugelfläche, so wird $a = r$, mithin auch $b = r$. Gegenstand und Bild fallen zusammen. Für $a < r$ ist $b > r$, und es wird $b = \infty$ für $a = p$. Befindet sich also eine Lichtquelle im Brennpunkt, so sendet der Spiegel parallele Strahlen aus. Eine solche Anordnung eignet sich dazu, das Licht auf weite Strecken hinauszusenden, ohne daß es sich erheblich zerstreut, wie es bei den großen elektrischen Scheinwerfern geschieht.

Wird a noch kleiner als $\frac{r}{2}$, so muß b negativ werden, das heißt: es liegt der **Bildpunkt hinter dem Spiegel.** Die Strahlen vereinigen sich nicht

wirklich, sondern nur scheinbar. Wir haben kein reelles Bild mehr, sondern ein imaginäres, virtuelles, ähnlich wie wir es bereits beim ebenen Spiegel kennen gelernt haben. Wir können übrigens ohne weiteres vom Kugelspiegel zum ebenen übergehen, wenn wir $r = \infty$ setzen. Es wird dann b negativ und ebenso groß wie a, in Übereinstimmung mit dem Resultat des § 2.

Liegt der Kugelmittelpunkt wie bisher auf der Seite des Gegenstands, so nennen wir den Spiegel einen Hohlspiegel, einen konkaven Spiegel, im entgegengesetzten Fall hingegen einen erhabenen oder Konvexspiegel. Dafür haben wir r also negativ zu wählen. Es ist daher auch die Bildweite negativ, das Bild liegt hinter dem Spiegel, d. h. es ist nur scheinbar vorhanden, ein virtuelles Bild. Die größte Bildweite ist $b = \frac{r}{2}$ für $a = \infty$. Sie ist also gleich der Brennweite eines Hohlspiegels vom selben Krümmungsradius.

## § 4. Bilder von Kugelspiegeln mit kleiner Öffnung.

Wir denken uns eine leuchtende Linie ST (Fig. 4). Der Punkt S hat sein Bild in B, der Punkt T in B′.

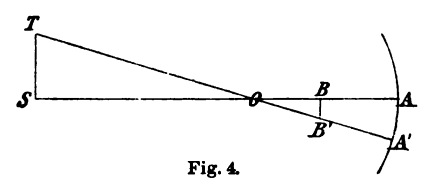



Fig. 4.

Wir erhalten ein verkehrtes Bild BB′ des Gegenstands ST. Das Verhältnis der Bildgröße BB′ zur Gegenstandsgröße ST können wir nun leicht finden, da ja

$$\frac{BB'}{ST} = \frac{OB}{OS} = \frac{r - b}{a - r}$$

ist. Nach Gleichung (2) haben wir

$$b = \frac{1}{\frac{2}{r} - \frac{1}{a}} = \frac{ar}{2a - r},$$

folglich

$$\frac{BB'}{ST} = \frac{r - \frac{ar}{2a - r}}{a - r} = \frac{r}{2a - r}.$$

Das Bild wird also je nach der Wahl der Gegenstandsweite sehr verschieden ausfallen.

Für einen unendlich weiten Gegenstand ist es unendlich klein. Es wächst mit der Annäherung des Gegenstands. Wird $a = r$, so ist Bild und Gegenstand gleich groß. Für $a < r$ ist das Bild größer als der Gegenstand. Es wird unendlich groß und rückt in unendliche Entfernung, d. h. es verschwindet für $a = \frac{r}{2}$. Wird $a < \frac{r}{2}$, so wird $\frac{BB'}{ST}$ negativ, das Bild kehrt sich um. Während wir also früher ein verkehrtes Bild hatten, haben wir jetzt ein aufrechtes. Aber es ist kein reelles Bild mehr, da auch b negativ wird, es liegt hinter dem Spiegel. Das Bild ist aber größer als der Gegenstand, wir haben einen Vergrößerungsspiegel. Setzen wir $r = \infty$, so wird $\frac{BB'}{ST} = -1$, wir haben wieder den Fall des ebenen Spiegels, für welchen Gegenstand und Bild gleich groß ist.

Wird r negativ, so liefert unsere Formel die Bildgröße in einem erhabenen Spiegel. Das Bild steht

aufrecht und ist immer kleiner als der Gegenstand.

### § 5. Brechungsgesetz — Brechungsexponent — geometrische Optik — Katoptrik — Dioptrik.

Fällt ein Lichtstrahl auf einen durchsichtigen Körper von glatter Oberfläche, so dringt er in den Körper ein, wird aber dabei im allgemeinen von seinem Wege abgelenkt, er wird gebrochen. Nennen wir analog dem Vorgang bei Spiegeln SO (Fig. 5) den einfallenden Strahl, welcher im Einfallspunkt O die Oberfläche AB des durchsichtigen Körpers trifft, OS′ den gebrochenen Strahl, $\alpha$ den Einfalls-, $\beta$ den Brechungswinkel, während CD das Einfallslot ist, so gelten folgende Gesetze:

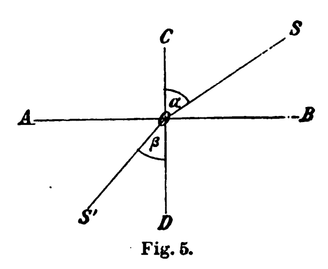


Fig. 5.

1. Einfallender Strahl, Einfallslot und gebrochener Strahl liegen in einer Ebene.

2. Das Verhältnis der Sinus des Einfalls- und Brechungswinkels ist eine konstante Größe, also

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = n\,.$$

Die Konstante n nennen wir den Brechungsquotienten oder Brechungsexponenten.

3. Nimmt das Licht seinen Ausgang auf der entgegengesetzten Seite und in entgegengesetzter Richtung, so macht es genau den-

selben Weg. Das heißt: wird der Strahl SO nach S′ gebrochen, so wird ein Strahl S′O nach S abgelenkt.

Die Lehre vom Strahlengang bei Vorhandensein reflektierender und brechender Flächen nennt man die geometrische Optik. Diese teilt man wieder in die Katoptrik und Dioptrik ein, je nachdem man es nur mit reflektierenden oder nur mit brechenden Flächen zu tun hat.

Setzen wir den Brechungsexponenten gleich Eins, den Brechungswinkel jedoch gleich dem Supplement des Einfallswinkels, so erhalten wir das Reflexionsgesetz. Wir werden demnach alle Resultate, welche wir für brechende Flächen erhalten, nach obigen Annahmen auf reflektierende Flächen beziehen können. Es gelten so die Gesetze der Dioptrik auch in der Katoptrik.

## § 6. Der Regenbogen.

Bekanntlich hängt der Wert des Brechungsexponenten nicht nur von der Natur der brechenden Substanz, sondern auch von der Art des Lichts ab. Er ist für verschiedene Farben verschieden. In der Regel nehmen die Brechungsexponenten mit der Farbe in folgender Reihenfolge zu: rot, orange, gelb, grün, blau, violett. Es wird daher jeder Lichtstrahl, der durch Brechung eine Ablenkung erleidet, gleichzeitig in seine Farben zerlegt. Eine

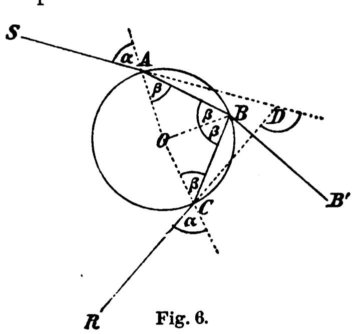



Fig. 6.

teilweise hierher gehörige Erscheinung ist der Regenbogen, welchen wir im folgenden näher untersuchen wollen.

Der Kreis (Fig. 6) stelle einen Regentropfen dar. Ein Sonnenstrahl $SA$ treffe in $A$ unter dem Einfallswinkel $\alpha$ den Tropfen. Er wird nach $B$ gebrochen, wo er teilweise nach $C$ reflektiert, teilweise nach $B'$ gebrochen wird. In $C$ erleidet er wieder eine teilweise Brechung nach $R$ und Reflexion usw. Der Strahl $BB'$ erfährt die Ablenkung

$$D_1 = 2\alpha - 2\beta,$$

der Strahl $CR$ die Ablenkung

$$D_2 = 2\alpha - 2\beta + \pi - 2\beta,$$

da die Ablenkung in $B$, wie aus der Zeichnung leicht zu ersehen, $\pi - 2\beta$ ist. Überhaupt wächst bei jeder Reflexion im Innern des Tropfens die Ablenkung um $\pi - 2\beta$, so daß ein Strahl, der nach k-maliger Reflexion wieder austritt, die Deviation

$$D = 2\alpha - 2\beta + k(\pi - 2\beta) = 2\alpha - 2(k+1)\beta + k\pi$$

erfährt.

Je stärker ein Sonnenstrahl gebrochen wird, desto mehr wird auch seine Farbe zerstreut. Wir werden daher das intensivste Licht im Minimum der Ablenkung haben. Wir wollen deshalb den Einfallswinkel fürs Ablenkungsminimum suchen. Wir haben dafür die Gleichung

$$\frac{dD}{d\alpha} = 2 - 2(k+1)\frac{d\beta}{d\alpha} = 0. \tag{3}$$

Differenzieren wir die Gleichung

$$\sin\alpha = n\sin\beta,$$

so erhalten wir

$$\cos\alpha\, d\alpha = n\cos\beta\, d\beta,$$

$$\frac{d\beta}{d\alpha} = \frac{\cos\alpha}{n\cos\beta}.$$

Dieser Wert, in Gleichung (3) eingesetzt, ergibt

$$\frac{dD}{d\alpha} = 2 - 2(k+1)\frac{\cos\alpha}{n\cos\beta} = 0,$$

was wir noch folgendermaßen umformen können:

$$n\cos\beta = (k+1)\cos\alpha.$$

Diese Gleichung quadriert, ergibt

$$n^2 - n^2\sin^2\beta = (k+1)^2 - (k+1)^2\sin^2\alpha$$

und wegen $\sin\alpha = n\sin\beta$

$$[(k+1)^2 - 1]\sin^2\alpha = (k+1)^2 - n^2,$$

$$\sin\alpha = \sqrt{\frac{(k+1)^2 - n^2}{(k+1)^2 - 1}}.$$

Setzen wir $k = 0$, so erhalten wir für $\sin\alpha$ einen unmöglichen Wert, jedoch für $k = 1, 2, 3\ldots$ wird der Wurzelausdruck für Wasser kleiner als Eins, da $n < 2$ ist. Wir werden demnach eine Reihe von Regenbogen erhalten, deren lichtstärkster der erste für $k = 1$ sein wird, da der Lichtstrahl um so mehr geschwächt wird, je öfter die Reflexionen stattfinden.

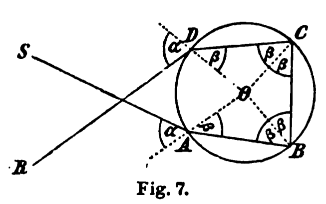


Fig. 7.

Wir fragen nun nach der Form des Regenbogens und wollen uns in unserer Untersuchung auf den ersten, den Hauptregenbogen beschränken, da sie für die weiteren, die Nebenregenbogen, ganz analog durchgeführt werden kann. Zu bemerken ist höchstens, daß für die einzelnen Regenbogen der das

Ablenkungsminimum liefernde Sonnenstrahl auch auf der unteren Seite des Regentropfens (Fig. 7) auffallen kann.

Ist AB (Fig. 8) die Erdoberfläche, und bildet der Sonnenstrahl SP mit ihr den Winkel $\sigma$, der gebrochene Strahl jedoch den Winkel $\varrho$, so ist bei einer einmaligen Reflexion D die Deviation, und es muß

$$D + \varrho + \sigma = \pi$$

sein. Da aber

$$D = 2\alpha - 4'\beta + \pi ,$$

so ist

$$\varrho + \sigma = \pi - D = 4\beta - 2\alpha .$$

Setzen wir $\sigma = 0$, d. h. steht die Sonne im Horizont, oder sehen wir davon ab, daß AB die Erdoberfläche sei, sondern eine zu den Sonnenstrahlen parallele Gerade, so wird um AB herum alles symmetrisch.

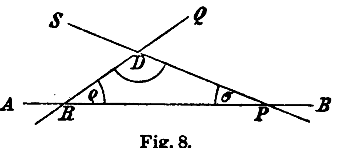


Fig. 8.

Der Regenbogen wird also ein Kreis sein vom Öffnungswinkel $2(\varrho + \sigma)$. Den vollständigen Kreis können wir nie sehen, wenn wir auf der horizontalen Erdoberfläche stehen, sondern höchstens einen Halbkreis bei Sonnenauf- oder Sonnenuntergang. Etwas anderes ist es jedoch auf einer hohen Bergesspitze oder vom Luftballon aus, wo der vollständige Kreis beobachtet wurde. Die Möglichkeit dazu ist auch vorhanden, wenn nicht die Sonne direkt, sondern ihr Spiegelbild in einem ruhigen Gewässer den Regenbogen erzeugt. Die Winkelsumme $\varrho + \sigma$ beträgt ungefähr 42 Grad.

Bilden wir den Ausdruck

$$\frac{d\varrho}{dn} = -\frac{dD}{dn}$$

so erhalten wir die Reihenfolge der Farben. Wir haben nun

$$\frac{dD}{dn} = 2\frac{d\alpha}{dn} - 4\frac{d\beta}{dn} = 2\frac{d\alpha}{dn} - 4\frac{d\beta}{d\alpha}\cdot\frac{d\alpha}{dn} - 4\frac{\partial\beta}{\partial n},$$

indem wir $\beta$ als abhängige Veränderliche von $\alpha$ und n einführen. Von früher her kennen wir als Bedingung des Deviationsminimums

$$2 - 4\frac{d\beta}{d\alpha} = 0,$$

daher wird

$$\frac{dD}{dn} = -4\frac{\partial\beta}{\partial n}.$$

Den Differentialquotienten $\frac{\partial\beta}{\partial n}$ gewinnen wir aus der Gleichung

$$\sin\beta = \frac{\sin\alpha}{n},$$

welche differenziert

$$\cos\beta\frac{\partial\beta}{\partial n} = -\frac{\sin\alpha}{n^2}$$

ergibt. Demnach ist

$$\frac{d\varrho}{dn} = -\frac{dD}{dn} = -\frac{4\sin\alpha}{n^2\cos\beta}.$$

Der Differentialquotient $\frac{d\varrho}{dn}$ ist negativ, d. h. mit wachsendem n nimmt $\varrho$ ab. Es wird also die **rote Farbe** den **äußersten Rand** des Regenbogens bilden, gegen die Mitte zu folgen dann die übrigen Farben.

Die hier gegebene Theorie trifft strenge nur für unendlich große Regentropfen zu, indem die Entstehung der Farben von der Tropfengröße nicht unabhängig ist,

was jedoch an dieser Stelle nicht näher erörtert werden kann. Daß die Farben nicht bloß durch Lichtbrechung entstehen, hat zur Folge, daß der Regenbogen nicht aus dem gewöhnlich genannten siebenfarbigen Band besteht, sondern wir können bei manchem Regenbogen eine ganz andere Farbenfolge beobachten.

## § 7. Abbildung eines Punktes durch eine brechende Kugelfläche — Brennpunkte — Brennweiten.

KK′ (Fig. 9) sei eine brechende Kugelfläche. Es ist dies der Fall, wenn sich links von ihr etwa Luft,

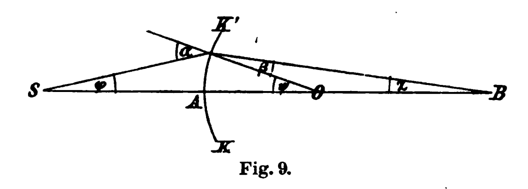



Fig. 9.

rechts Glas befindet. Der Strahl SA, welcher gegen den Krümmungsmittelpunkt O der Kugelfläche gerichtet ist, wird nicht gebrochen, da er mit dem Einfallslot zusammenfällt. Wir nennen ihn den Hauptstrahl. Ein Strahl SM wird nach dem Gesetz $\sin\alpha = n \sin\beta$ gebrochen und schneidet den Hauptstrahl in B. Wir wollen unsere Untersuchung nur auf kleine Einfallswinkel ausdehnen, können dann den Sinus mit dem Bogen vertauschen und schreiben

$$\alpha = n\beta .$$

Wir haben nun

$$\alpha = \varphi + \psi , \quad \beta = \psi - \chi ,$$

mithin

$$\varphi + \psi = n\psi - n\chi,$$
$$(4) \qquad \varphi + n\chi = (n-1)\psi.$$

Die verschiedenen Winkel können wir folgendermaßen darstellen:

$$\varphi = \frac{MA}{SA}, \quad \psi = \frac{MA}{OA}, \quad \chi = \frac{MA}{BA}.$$

Wir setzen ferner

$$SA = a, \quad OA = r, \quad BA = b$$

und nennen a die Gegenstandsweite, r den Krümmungsradius, b die Bildweite. Wir erhalten dann aus Gleichung (4) ohne weiteres

$$\frac{1}{a} + \frac{n}{b} = \frac{n-1}{r}.$$

Es vereinigen sich also in der Tat alle Strahlen, welche von S ausgehen, in B. Wir haben hier ein reelles Bild.

Lassen wir S ins Unendliche rücken, d. h. setzen wir $a = \infty$ oder, was dasselbe bedeutet, lassen wir parallele Strahlen auffallen, so vereinigen sie sich in einem Punkt, den wir $F_1$ nennen wollen. Es ist der hintere Brennpunkt und

$$F = b = \frac{nr}{n-1}$$

die hintere Brennweite. Das ist auch gleichzeitig die kleinste mögliche Bildweite. Lassen wir S näher rücken, so wird b größer und wir erreichen schließlich einen Punkt $f_1$, für welchen b unendlich wird. Die Gegenstandsweite ist dann

$$f = a = \frac{r}{n-1}.$$

Wir nennen f die **vordere Brennweite**, $f_1$ den **vorderen Brennpunkt**. Die beiden Brennweiten stehen also in der Beziehung

$$F = n f \, .$$

Wird nun a noch kleiner, so wird b negativ, d. h. die Strahlen vereinigen sich nicht mehr, wohl aber ihre rückwärtigen Verlängerungen in einem Punkt, welcher vor der Kugelfläche liegt. Wir erhalten ein **imaginäres Bild**.

Lassen wir r unendlich werden, so erhalten wir eine ebene brechende Fläche. Es wird dann

$$b = - n a \, .$$

Wird r negativ, haben wir also den Krümmungsmittelpunkt O links von der brechenden Fläche, so wird auch die Brennweite negativ. Es vereinigen sich dann die Strahlen nur virtuell. Wir erhalten kein reelles Bild mehr.

## § 8. Bildgröße.

Gleicherweise wie der Punkt S (Fig. 10) in B, bildet sich T in B′ ab. Wir erhalten von dem Gegen-

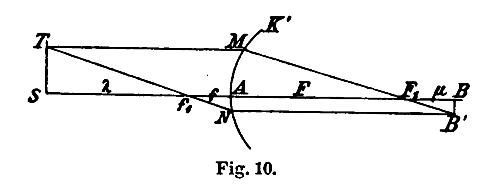



Fig. 10.

stand ST das verkehrte Bild BB′, dessen Größe wir leicht finden können. Wir wollen die Bezeichnungen

$$S f_1 = \lambda \, , \quad F_1 B = \mu$$

einführen und haben dann

$$\frac{ST}{BB'} = \frac{ST}{AN} = \frac{\lambda}{f},$$

aber auch

$$\frac{ST}{BB'} = \frac{AM}{BB'} = \frac{F}{\mu}.$$

Rückt also der Gegenstand aus dem Unendlichen bis in die vordere Brennweite, so wächst das Bild von der Größe Null bis zur Größe Unendlich. Es ist reell und umgekehrt. Rückt der Gegenstand noch näher, so wird $\lambda$ negativ, wir erhalten ein aufrechtes vergrößertes virtuelles Bild. Für eine konkave brechende Fläche wird r negativ. Es wird dann auch f und gleicherweise F negativ und für alle Fälle $\lambda > f$. Wir haben also dann immer ein virtuelles aufrechtes verkleinertes Bild.

### § 9. System zweier brechender zentrierter Kugelflächen — Linsen.

Kugelflächen, deren Mittelpunkte auf einer Geraden liegen, nennt man zentriert. Zwei brechende Kugel-

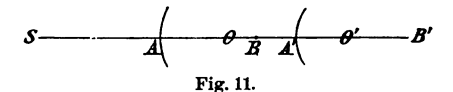


Fig. 11.

flächen, A und A' (Fig. 11), sind demnach immer zentriert. Das Bild B des Punktes S, welches die erste brechende Fläche entwirft, wird für die zweite brechende Fläche zum leuchtenden Punkt und sie entwirft davon ein Bild in B'. Für die brechende Fläche A gilt nun die Gleichung

$$(5) \qquad \frac{1}{a} + \frac{n}{b} = \frac{n-1}{r},$$

für die zweite A′ analog

$$\frac{1}{a'} + \frac{n'}{b'} = \frac{n'-1}{r'}.$$

Ist nun das Medium rechts von A′ gleich jenem links von A, so ist $n' = \frac{1}{n}$. Ferner ist

$$a' = AA' - AB = e - b,$$

wenn e die Entfernung der beiden Kugelflächen ist. Darnach wird die Gleichung für den Strahlengang in der zweiten Fläche

$$\frac{n}{e-b} + \frac{1}{b'} = -\frac{n-1}{r'}.$$

Wir nehmen noch an, e sei so klein, daß wir es gegenüber den anderen vorhandenen Größen vernachlässigen können. Wir haben dann eine dünne Linse vor uns. Unsere letzte Gleichung wird jetzt

$$-\frac{n}{b} + \frac{1}{b'} = -\frac{n-1}{r'},$$

was zur Gleichung (5) addiert

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b'} = (n-1)\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r'}\right)$$

ergibt. Es ist dies die sogenannte Linsenformel.

Ist $\frac{1}{a} - \frac{1}{r'}$ positiv, so haben wir eine Sammellinse, im entgegengesetzten Fall eine Zerstreuungslinse. Im ersten Fall vereinigen sich parallel auffallende Strahlen, für welche $a = \infty$ ist, in der Entfernung p hinter der Linse nach der Gleichung

$$\frac{1}{p} = (n-1)\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r'}\right),$$

und es ist p die **Brennweite** der Linse, weshalb wir die Linsenformel auch

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b'} = \frac{1}{p}$$

schreiben können. Diese Gleichung hat dieselbe Form wie jene für den Kugelspiegel (§ 3), weshalb wir uns hier ihre weitere Diskussion ersparen können.

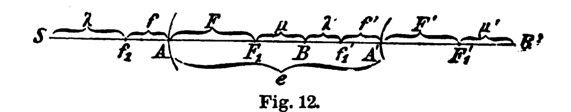



Fig. 12.

Im vorhergehenden Paragraphen fanden wir für das Verhältnis des Gegenstands zum Bild die Gleichung

$$\frac{ST}{BB'} = \frac{\lambda}{f} = \frac{F}{\mu}.$$

Es gilt demnach für eine brechende Fläche die Beziehung

$$(6) \qquad \lambda\mu = fF,$$

welche wir auch auf mehrere brechende Flächen ausdehnen können. Für die beiden Kugelflächen A und A' (Fig. 12) haben wir also die Gleichung (6) nebst der zweiten

$$(7) \qquad \lambda'\mu' = f'F',$$

wenn wir das Bild B zum Gegenstand für die zweite brechende Fläche werden lassen. Die Entfernung beider Flächen ist also

$$(8) \qquad e = F + \mu + \lambda' + f'.$$

Wir finden den vorderen Brennpunkt des Systems, wenn

nach der zweiten Brechung die Strahlen parallel laufen, also $\mu' = \infty$ wird. Dann muß nach Gleichung (7) $\lambda' = 0$ werden, während aus Gleichung (8)

$$\mu = e - F - f'$$

und aus Gleichung (6)

$$\lambda = \frac{f F}{e - F - f'}$$

folgt.

Wir rechnen die vordere Brennweite $\varphi$ von der ersten Kugelfläche aus. Sie wird also

$$\varphi = \lambda + f = \frac{f F}{e - F - f'} + f = f \frac{e - f'}{e - F - f'}.$$

Und in ganz derselben Weise finden wir für die hintere Brennweite unseres Systems

$$\Phi = F' \frac{e - F}{e - F - f'},$$

wobei diese Brennweite von der hinteren Linsenfläche aus gezählt ist.

Wir wollen als ein Beispiel für die gewonnenen Gleichungen die plankonvexe Linse behandeln. Der Krümmungsradius der vorderen Fläche sei r, für die hintere Fläche ist er demnach $\infty$. Wir haben dann (§ 7)

$$f = \frac{r}{n - 1}, \quad F = \frac{n r}{n - 1}, \quad f' = F' = \infty,$$

daher

$$\varphi = f \frac{e - f'}{e - F - f'} = f \cdot \frac{- f'}{- f'} = f,$$

da ja e und F gegen $\infty$ wegfällt. Ferner haben wir

$$\Phi = F' \frac{e - F}{e - F - f'} = n' f' \frac{e - F}{- f'} = \frac{F - e}{n} = f - \frac{e}{n} = \varphi - \frac{e}{n}.$$

Die hintere Brennweite ist also um $\frac{e}{n}$ kleiner als die vordere.

## § 10. **Hauptebenen — Hauptpunkte.**

Durch die Einführung der Brennweiten $\varphi$ und $\Phi$ können wir wiederum zwei brechende Flächen wie eine einzige behandeln, und es ist leicht einzusehen, daß wir auf dieselbe Weise jetzt drei, vier usw. brechende Flächen kombinieren können, vorausgesetzt, daß sie ein zentriertes System sind, d. h. daß die Krümmungsmittelpunkte der Kugelflächen alle in einer Geraden liegen. Nicht so einfach wie bei einer unendlich dünnen Linse ist aber jetzt die Konstruktion der Bilder. Zu dem Zweck führen wir den Begriff der zwei Hauptebenen ein. Diese haben die Eigenschaft, daß jeder Strahl, welcher durch die erste geht, in derselben Höhe auch die zweite passiert. Wir sehen wegen der allseitigen Symmetrie sofort ein, daß diese beiden Ebenen senkrecht auf dem Hauptstrahl stehen müssen. Ihre Schnittpunkte mit ihm nennen wir die Hauptpunkte.

Wir haben also zwei Ebenen von der Eigenschaft zu suchen, daß der Gegenstand in der einen kongruent dem Bild in der andern ist. Wir verfolgen dabei wieder die Methode, die gestellte Aufgabe erst für zwei brechende Flächen zu lösen, da ja die Rechnung für mehrere Flächen nach demselben Schema vor sich geht. Wir haben nach dem vorhergehenden Paragraphen für das Verhältnis des Gegenstands G zum Bild B bei der ersten Brechung

$$\frac{G}{B} = \frac{\lambda}{f} = \frac{F}{\mu},$$

für die zweite

$$\frac{G'}{B'} = \frac{\lambda'}{f'} = \frac{F'}{\mu'} .$$

Nun ist aber der Gegenstand bei der zweiten Brechung das von der ersten Brechung gelieferte Bild, also

$$G' = B ,$$

folglich, wenn wir die obigen Gleichungen miteinander multiplizieren,

$$\frac{G}{B'} = \frac{\lambda\lambda'}{f f'} = \frac{F F'}{\mu\mu'} .$$

Da das Bild sich bei jeder Brechung umkehrt, so ist das zweite wieder aufrecht. Soll es daher mit dem Gegenstand kongruent sein, so muß Gegenstand und Bild im Verhältnis Eins stehen. Wir haben also

$$\frac{\lambda\lambda'}{f f'} = \frac{F F'}{\mu\mu'} = 1 . \tag{9}$$

Aus Gleichung (8) ergibt sich

$$\mu + \lambda' = e - F - f' = \delta . \tag{10}$$

Multiplizieren wir diese Gleichung mit $\lambda$, so erhalten wir mit Zuziehung der Gleichungen (6) und (9)

$$f F + f f' = \delta \lambda ,$$

$$\lambda = \frac{f F + f f'}{\delta} .$$

Ganz analog ergibt sich durch Multiplikation der Gleichung (10) mit $\mu'$

$$F F' + f' F' = \delta \mu' ,$$

$$\mu' = \frac{F F' + f' F'}{\delta} .$$

Damit ist die Lage der beiden Hauptebenen bestimmt,

doch ist es bequemer, ihren Abstand von der ersten bezgl. zweiten brechenden Fläche zu wissen. Für die erste Hauptebene ist er

$$h = \lambda + f = f\left(\frac{F + f'}{\delta} + 1\right) = \frac{f}{\delta}(F + f' + e - F - f') = \frac{ef}{\delta}.$$

Für den Abstand der zweiten Hauptebene von der zweiten brechenden Fläche findet sich gleicherweise

$$H = \frac{eF'}{\delta}.$$

Es ist noch angezeigt, die Brennweiten von den

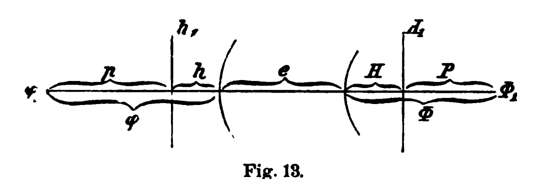



Fig. 13.

Hauptpunkten an zu zählen. Wir haben dann (Fig. 13) die vordere Brennweite

$$p = \varphi - h = f\frac{e - f'}{\delta} - h = -\frac{ff'}{\delta},$$

für die hintere

$$P = \Phi - H = F'\frac{e - F}{\delta} - H = -\frac{FF'}{\delta}$$

Da nun

$$F = nf, \quad F' = n'f',$$

so

$$P = -\frac{nn'ff'}{\delta} = nn'p.$$

Ist links und rechts vom optischen System dasselbe

Medium, so $n' = \frac{1}{n}$, folglich

$$P = p.$$

Die Konstruktion des Bildes ist nun sehr einfach. Wir errichten in den beiden Hauptpunkten $h_1$ und $H_1$ (Fig. 14) die beiden senkrechten Ebenen h und H. Ein Strahl, welcher parallel zum Hauptstrahl von T ausgeht und die erste Hauptebene in A trifft, muß in gleicher Höhe bei A′ die zweite Hauptebene verlassen und dann durch den hinteren Brennpunkt $P_1$ gehen. Ein Strahl,

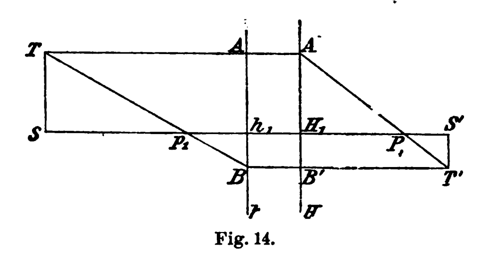



Fig. 14.

welcher durch den vorderen Brennpunkt $p_1$ geht und in B die erste Hauptebene trifft, verläßt ebenfalls in gleicher Höhe in B′ die zweite und geht dann parallel zum Hauptstrahl weiter. In T′ schneiden sich beide Strahlen; es ist dort das Bild des Punktes T.

## § 11. Bikonvexe Linse.

Die beiden brechenden Flächen einer bikonvexen Linse sollen denselben Krümmungsradius haben. Es gilt also die Beziehung

$$f' = F = n f.$$

Die Lage der ersten Hauptebene ist daher gegeben durch

$$h = \frac{e f}{e - F - f'} = \frac{e f}{e - 2 n f}.$$

Ist die Linse nicht sehr dick, so können wir e gegen 2 n f vernachlässigen und erhalten

$$h = -\frac{e}{2 n} = -\frac{e}{3},$$

wenn wir, wie es bei Glas ungefähr zutrifft, $n = \frac{3}{2}$ setzen. h ist negativ, d. h. es liegt die erste Hauptebene $h_1$ (Fig. 15) hinter der Linsenfläche, symmetrisch dazu die

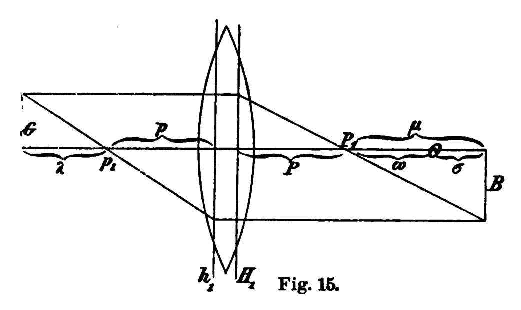


Fig. 15.

zweite Hauptebene $H_1$. Die beiden Brennweiten p und P sind einander gleich. Für das Verhältnis des Gegenstands zum Bild haben wir daher

$$\frac{G}{B} = \frac{\lambda}{p} = \frac{p}{\mu},$$

woraus folgt:

$$\lambda \mu = p^2.$$

Wir versetzen nun unser Auge in den Punkt O, welcher die Strecke $\mu$ so teilt, daß

$$\mu = \omega + \sigma.$$

Wir wollen die Linse als Lupe benutzen. Die Entfernung des Bildes vom Auge muß also in der deutlichen Sehweite s und negativ sein. Wir haben demnach

$$\sigma = -s$$

zu setzen. Darnach wird

$$\mu = \omega - s\,,$$

wobei $s > \omega$, $\mu$ also negativ ist. Desgleichen wird

$$\lambda = -\frac{p^2}{s - \omega}$$

negativ, d. h. der Gegenstand muß innerhalb der Brennweite p liegen. Unter der Vergrößerung verstehen wir das Verhältnis des Bildes zum Gegenstand

$$V = \frac{B}{G} = \frac{p}{\lambda}\,.$$

In unserm gegebenen Fall wird somit

$$V = -\frac{s - \omega}{p}\,.$$

Das negative Vorzeichen bedeutet, daß wir ein aufrechtes Bild erhalten. Je weiter wir das Auge von der Linse entfernen, desto größer wird $\omega$, desto kleiner das Bild. Denken wir uns das Auge in der zweiten Hauptebene, so $\omega = -p$ und

$$V = -\frac{s + p}{p} = -\left(\frac{s}{p} + 1\right),$$

was die gewöhnlich in Verwendung kommende Vergrößerungsformel ist.

## § 12. Huygenssches Prinzip.

Wir haben das Licht nach Huygens Theorie als Wellenbewegung aufgefaßt. Von Huygens rührt

folgendes Prinzip her: Einen jeden Punkt einer Welle kann man als einen Erregungspunkt neuer Wellen betrachten. Die gemeinschaftliche Umhüllende dieser Wellen, der Elementarwellen, stellt die wirkliche Welle, die Hauptwelle, dar. Denken wir uns z. B. eine Kugelwelle, welche von einem leuchtenden Punkt ausgeht. Werden alle Punkte der Kugelfläche als Erregungspunkte neuer Wellen aufgefaßt, so entstehen unendlich viele kongruente Kugelwellen, deren Umhüllende tatsächlich die Hauptwelle darstellt.

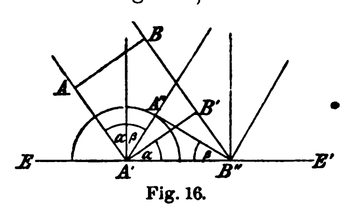


Fig. 16.

Aus diesem Prinzip läßt sich leicht das Gesetz der Reflexion und Brechung ableiten. Es falle ein paralleles Strahlenbündel AB (Fig. 16) auf die Ebene EE′ unter dem Einfallswinkel $\alpha$. Im Punkt A′ entsteht eine Elementarwelle der Planwelle A′B′ und so der Reihe nach in allen Punkten der Strecke A′B″. Kommt schließlich der Punkt B′ in B″ an, so haben wir als Hauptwelle A″B″. Da nun

$$A'A'' \perp A''B'', \quad A'B' \perp B'B'', \quad A'A'' = B'B'',$$

so muß auch $\alpha = \beta$ sein, womit das Reflexionsgesetz als eine Folge der Wellentheorie erscheint.

Das Brechungsgesetz können wir folgendermaßen erhalten. AB (Fig. 17) sei die Trennungsfläche zweier Medien. Im oberen sei die Lichtgeschwindigkeit c, im unteren c′, und es sei $c > c'$. Trifft die ebene Welle CD in C′ auf, so entsteht da eine Elementarwelle mit der Geschwindigkeit c′. Dasselbe geschieht der Reihe nach in allen übrigen Punkten der Strecke C′D″. Während

C nach C″ gelangt, kommt D nach D″. Es ist daher C″D″ die neue Welle. Nun ist

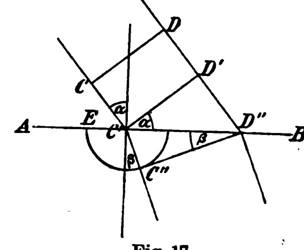


Fig. 17.

$$\overline{C'D''} \cdot \sin\alpha = D'D'' ,$$

$$\overline{C'D''} \cdot \sin\beta = C'C'' ,$$

folglich

$$\frac{D'D''}{C'C''} = \frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \frac{c}{c'} = n .$$

Damit ist das Brechungsgesetz abgeleitet, und es zeigt sich, daß der Brechungsexponent nichts anderes als das Verhältnis der Lichtgeschwindigkeiten in den beiden Medien ist.

## § 13. Fermats Satz.

Fermat stellte folgendes Prinzip auf: Jeder Lichtstrahl pflanzt sich so fort, daß die zur Zurücklegung des Wegs erforderliche Zeit ein Minimum wird. Auch dieses Prinzip ergibt das Reflexions- und Brechungsgesetz in derselben Form wie das Huygenssche. Soll das Licht vom Punkt A (Fig. 18) ausgehend von der Fläche EF in B nach C reflektiert werden, so wird die Reflexion so von statten gehen, daß die Zeit der Fortpflanzung, folglich auch der Weg ABC ein Minimum wird. Nach unserer Zeichnung ist

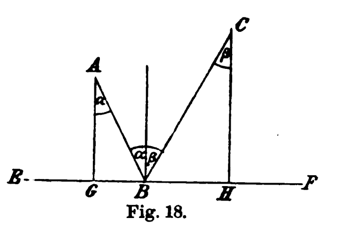


Fig. 18.

$$GH = \overline{AG} \cdot \operatorname{tg}\alpha + \overline{HC} \cdot \operatorname{tg}\beta ,$$

was durch Differentiation ergibt

$$(11) \qquad \frac{\overline{AG} \cdot d\alpha}{\cos^2\alpha} = -\frac{\overline{HC} \cdot d\beta}{\cos^2\beta}.$$

Soll der Weg

$$AB + BC = \frac{AG}{\cos\alpha} + \frac{HC}{\cos\beta}$$

ein Minimum werden, so muß sein Differential Null sein. Daß ergibt

$$(12) \qquad \frac{\overline{AG} \cdot \sin\alpha\, d\alpha}{\cos^2\alpha} = -\frac{\overline{HC} \cdot \sin\beta\, d\beta}{\cos^2\beta}$$

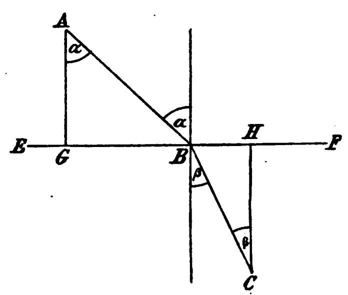


Fig. 19.

Dividieren wir Gleichung (12) durch (11), so resultiert $\sin\alpha = \sin\beta$ oder $\alpha = \beta$. Wir erhalten also in der Tat das Reflexionsgesetz.

Auf ganz demselben Weg ergibt sich auch das Brechungsgesetz. ABC (Fig. 19) stelle uns den Strahlengang durch die brechende Ebene EF dar. Oben sei die Lichtgeschwindigkeit c, unten c'. Die Zeit

$$t = \frac{AB}{c} + \frac{BC}{c'} = \frac{AG}{c\cos\alpha} + \frac{HC}{c'\cos\beta}$$

soll ein Minimum werden, d. h. es muß das Differential

$dt = 0$ sein, was

$$\frac{\overline{AG} \cdot \sin\alpha \, d\alpha}{c \cos^2\alpha} = - \frac{\overline{HC} \cdot \sin\beta \, d\beta}{c' \cos^2\beta} \tag{13}$$

ergibt. Ferner folgt wiederum aus dem Differential der konstanten Strecke GH die Gleichung (11). Gleichung (13) durch (11) dividiert, ergibt sodann

$$\frac{\sin\alpha}{c} = \frac{\sin\beta}{c'},$$

oder

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \frac{c}{c'} = n\,,$$

das Brechungsgesetz. Es stimmen also die Folgerungen aus dem Huygensschen und dem Fermatschen Prinzip vollständig überein..

## § 14. Interferenz.

Nach dem Früheren müssen wir das Licht als eine schwingende Bewegung des Äthers auffassen. Diese Bewegung pflanzt sich in ähnlicher Weise fort wie die Schallbewegung in der Luft. Eine befriedigende Vorstellung von der Bahn, welche die Ätherteilchen bei der Lichtbewegung beschreiben, ist jedoch bis jetzt noch nicht geliefert worden. Sicher ist nur das eine, daß die Ätherteilchen eine periodische Bewegung machen müssen, d. h. eine solche, bei welcher sie nach einer bestimmten Zeit immer wieder eine bestimmte Lage passieren. Dieser Bewegungszustand pflanzt sich in Wellenform fort und hat die Eigenschaft, daß er nach Verlauf einer halben Wellenlänge gerade entgegengesetzte Bewegungen darstellt. Zwei gleichartige Strahlen, welche um eine halbe Wellenlänge gegen-

einander verschoben sind, werden daher die Ätherteilchen gar nicht in Bewegung setzen können, da die Kräfte, welche von den beiden Lichtstrahlen ausgeübt werden, gleich und entgegengesetzt sind. Das Licht muß verschwinden. Die beiden Strahlen werden sich aber in ihrer Wirkung unterstützen, wenn sie ohne Phasenverschiebung den Ätherteilchen begegnen. Wir haben hier also ganz analoge Vorgänge wie bei der Interferenz des Schalls (Bd. I § 73) und belegen sie daher auch mit dem Namen „Interferenz des Lichts".

### § 15. Fresnels Spiegelversuch.

Strahlen, welche mit Phasenunterschied in einem Punkt ankommen sollen, müssen ihren Weg in verschiedenen Zeiten zurücklegen. Dies ermöglicht eine

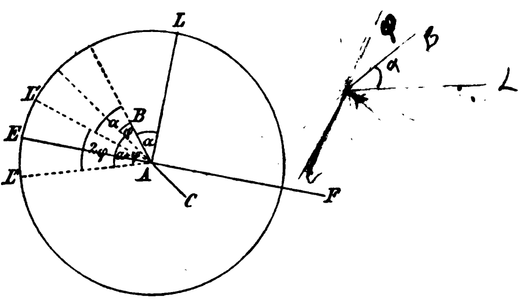



Fig. 20.

Anordnung von Spiegeln, welche von Fresnel, dem hervorragendsten Pfadfinder auf dem Gebiet der Optik, gefunden wurde. Zwei ebene Spiegel AB und AC (Fig. 20) stoßen unter einem sehr spitzigen Winkel $\varphi$ in A zusammen. Der leuchtende Punkt L liege so,

daß AL mit der Spiegelfläche AB den Winkel $\alpha$ einschließt. Beschreiben wir daher mit dem Radius AL um A als Mittelpunkt einen Kreis, so liegen auf dem Kreisumfang die beiden Bilder L′ und L″, welche die Spiegel AB und AC von L entwerfen. Halbieren wir L′L″ in E, so ist die Gerade EAF eine Symmetrielinie zwischen L′ und L″. Die Strahlen, welche von den beiden Bildern L′ und L″ ausgehen, werden daher Interferenzerscheinungen liefern, welche zu EF symmetrisch liegen.

Wir stellen in F (Fig. 21) einen Schirm auf und fragen nun, welche Lichterscheinungen sich in einem

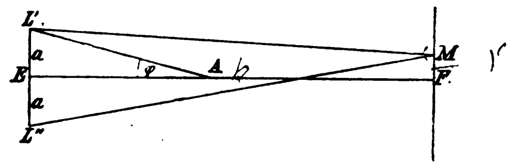



Fig. 21.

beliebigen Punkt M zeigen werden. Wir wollen die Strecken

$$L'L'' = 2a\,, \quad EF = b\,, \quad FM = y$$

setzen. Es handelt sich also darum, den Zeitunterschied, oder was hier dasselbe ist, den Wegunterschied der beiden Strahlen L′M und L″M kennen zu lernen. Wir haben

$$\overline{L''M}^2 = b^2 + (a + y)^2\,,$$
$$\overline{L'M}^2 = b^2 + (a - y)^2\,,$$

daher

$$\overline{L''M}^2 - \overline{L'M}^2 = (L''M - L'M)(L''M + L'M) = 4ay\,.$$

Wir können nun mit sehr kleiner Vernachlässigung

$$L''M + L'M = 2\,b$$

setzen und erhalten so

$$L''M - L'M = \frac{2\,a\,y}{b}.$$

Haben wir Licht von der Wellenlänge $\lambda$, so wird für alle y, wo der Gangunterschied der beiden Strahlen $\frac{\lambda}{2}$, $\frac{3\lambda}{2}$, $\frac{5\lambda}{2}$ ... ist, Dunkelheit eintreten, da sich dort beide Strahlen infolge der Interferenz austilgen. Es ist dies also für

$$(14) \qquad y = \pm \frac{(2\,k + 1)\,b\,\lambda}{4\,a}$$

der Fall, wenn $k = 0, 1, 2 \ldots$ ist.

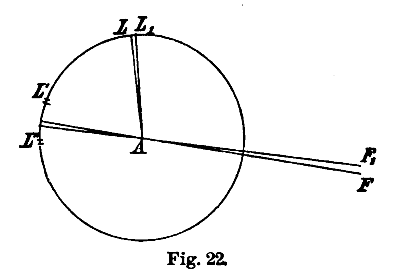


Fig. 22.

In Wirklichkeit steht uns nun ein mathematischer Lichtpunkt nicht zur Verfügung, sondern wir müssen eine schmale Spalte $LL_1$ (Fig. 22) anwenden, durch welche wir das Licht eintreten lassen. Die Folge davon ist, daß die beiden Spiegelbilder ebenfalls eine gewisse Ausdehnung haben, so daß die Bilder des Punktes L die Gerade AF, hingegen die Bilder von $L_1$ die Gerade $AF_1$ zur Symmetrielinie haben. Es kann daher vorkommen, daß auf eine dunkle Stelle des Schirms,

die von L herrührt, gerade eine lichte, durch $L_1$ erzeugt, zu fallen kommt, so daß wir keine Interferenzstreifen wahrnehmen können. Es darf somit die Spalte $LL_1$ eine gewisse Breite nicht übersteigen. Unsere Aufgabe läuft darauf hinaus, $FF_1$ möglichst klein zu machen. Es ist $FF_1 = \overline{AF} \cdot \beta$, wenn wir den $\sphericalangle LAL_1 = \beta$, setzen. Wir haben somit $\beta = \frac{LL_1}{AL}$, folglich

$$FF_1 = \frac{\overline{AF} \cdot \overline{LL_1}}{AL}.$$

Wir erzielen also eine möglichst gute Wirkung, wenn wir die Spiegel möglichst weit von der Spalte aufstellen und diese selbst sehr schmal machen, während wir den Winkel $\varphi$ der beiden Spiegel sehr klein wählen.

Die Größe a in der Gleichung (14) ist durch den Winkel der beiden Spiegel und ihre Entfernung vom Lichtpunkt gegeben. Da wir b und y ebenfalls messen können, so haben wir in Fresnels Spiegelversuch ein Mittel, die Wellenlänge $\lambda$ des Lichts und sodann aus der bekannten Lichtgeschwindigkeit die Schwingungszahl zu bestimmen.

## § 16. Farben dünner Blättchen.

Von dem leuchtenden Punkt S (Fig. 23) falle ein Strahl SA auf die planparallele Platte PP′. Im Punkt A wird er teilweise nach C reflektiert, teilweise nach B gebrochen. Dort findet ebenfalls Reflexion und Brechung statt; ein Teil geht nach E, der andere nach A′, und das geht so fort, so daß eine Reihe von Strahlen nach oben, eine andere nach unten von der Platte weggeht. Das Auge wird daher sowohl von oben als von unten in der Platte Interferenzerscheinungen

der nebeneinander verlaufenden Strahlen sehen können, welche man mit dem Namen „Farben dünner Blättchen“ belegt, da für den Fall, daß vom Punkt S weißes Licht oder sonst eine Mischfarbe ausgeht, an einer bestimmten Stelle der Platte nur Licht von bestimmter Wellenlänge, d. h. von bestimmter Farbe verlöschen wird,

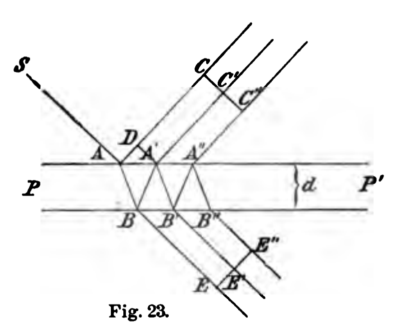



Fig. 23.

so daß wir dann die Mischfarbe des übrigen Lichts in der Platte sehen.

Wir wollen den Schwingungszustand des Äthers durch

$$\sigma = a \sin \frac{2\pi t}{\tau}$$

darstellen. Welcher Art von periodischer Bewegung dieser Schwingungszustand $\sigma$ ist, wissen wir bekanntlich nicht, doch ist das für die folgenden Untersuchungen auch nicht nötig. Die Fortpflanzungsgeschwindigkeit sei außerhalb der Platte c, innerhalb c'. Der Schwingungszustand $\sigma$ in A wird daher nach der Zeit $\frac{AC}{c}$ in C sein, nur mit dem Unterschied, daß er dort mit geringerer

Stärke auftritt, da er ja nur teilweise reflektiert wird. Wir können daher den Bewegungszustand in C

$$\sigma_1 = \alpha \, a \sin \frac{2\pi}{\tau}\left(t - \frac{AC}{c}\right)$$

nennen, wobei $\alpha$ ein echter Bruch ist, der die Verminderung der Stärke des Schwingungszustands andeutet, oder wenn wir wollen, der das Verhältnis zwischen der neuen und alten Amplitude der Schwingung darstellt. In ähnlicher Weise können wir nun weiter schließen. Wir werden in C′ den Zustand

$$\sigma_2 = \alpha' \beta' \beta \, a \sin \frac{2\pi}{\tau}\left(t - \frac{AB}{c'} - \frac{BA'}{c'} - \frac{A'C'}{c}\right)$$

$$= \alpha' \beta' \beta \, a \sin \frac{2\pi}{\tau}\left(t - \frac{2\,AB}{c'} - \frac{A'C'}{c}\right)$$

haben. Wir haben hier durch $\alpha'$ dem Lichtverlust bei der Brechung in A, durch $\beta$ jenem bei der Reflexion in B, durch $\beta'$ dem bei der Brechung in A′ Rechnung getragen. Auf ganz dieselbe Weise finden wir nun weiter

$$\sigma_3 = \alpha' \beta^3 \beta' \, a \sin \frac{2\pi}{\tau}\left(t - \frac{4\,AB}{c'} - \frac{A''C''}{c}\right),$$

$$\sigma_4 = \alpha' \beta^5 \beta' \, a \sin \frac{2\pi}{\tau}\left(t - \frac{6\,AB}{c'} - \frac{A'''C'''}{c}\right),$$

. . . . . . . . . . . . . . . .

Es ist nun

$$A'C' = AC - AD\,,$$
$$A''C'' = AC - 2\,AD\,,$$
$$\ldots\ldots\ldots,$$

wenn A′D das Lot auf AC ist. Wir setzen jetzt

$$\frac{2\pi}{\tau}\left(t - \frac{AC}{c}\right) = \varphi\,,$$

$$\frac{2\pi}{\tau}\left(\frac{2\,\mathrm{AB}}{c'} - \frac{\mathrm{AD}}{c}\right) = \psi$$

und erhalten dann für die Summe sämtlicher $\sigma$ den Ausdruck

$$\Sigma = a[\alpha \sin\varphi + \alpha'\beta'\beta \sin(\varphi - \psi) + \alpha'\beta'\beta^3 \sin(\varphi - 2\psi) + \alpha'\beta'\beta^5 \sin(\varphi - 3\psi) + \ldots].$$

Diese Summe wird uns also das Resultat darstellen für die Lichterscheinung, welche unser Auge in der dünnen Platte PP′ im reflektierten Licht erblickt. Um die Summierung durchführen zu können, führen wir folgende Hilfssummen ein:

$$S = \sin(\varphi - \psi) + \beta^2 \sin(\varphi - 2\psi) + \beta^4 \sin(\varphi - 3\psi) + \ldots,$$
$$R = \cos(\varphi - \psi) + \beta^2 \cos(\varphi - 2\psi) + \beta^4 \cos(\varphi - 3\psi) + \ldots$$

und bilden

$$\begin{aligned} R + Si &= e^{(\varphi-\psi)i} + \beta^2 e^{(\varphi-2\psi)i} + \beta^4 e^{(\varphi-3\psi)i} + \ldots \\ &= e^{(\varphi-\psi)i}(1 + \beta^2 e^{-\psi i} + \beta^4 e^{-2\psi i} + \beta^6 e^{-3\psi i} + \ldots \\ &= e^{(\varphi-\psi)i}(1 + n + n^2 + n^3 + \ldots), \end{aligned}$$

wenn wir $\beta^2 e^{-\psi i} = n$ setzen. Die geometrische Reihe hat nun eine bekannte Summenformel, wonach wir erhalten

$$\begin{aligned} R + Si &= e^{(\varphi-\psi)i} \cdot \frac{1}{1-n} = \frac{e^{(\varphi-\psi)i}}{1-\beta^2 e^{-\psi i}} \cdot \frac{1-\beta^2 e^{\psi i}}{1-\beta^2 e^{\psi i}} \\ &= e^{(\varphi-\psi)i} \frac{1-\beta^2 e^{\psi i}}{1 - 2\beta^2 \cos\psi + \beta^4} = \frac{e^{(\varphi-\psi)i} - \beta^2 e^{\varphi i}}{N} \\ &= \frac{\cos(\varphi-\psi) + i\sin(\varphi-\psi) - \beta^2\cos\varphi - i\beta^2\sin\varphi}{N}, \end{aligned}$$

wobei wir

$$1 - 2\beta^2 \cos\psi + \beta^4 = N$$

gesetzt haben. Der imaginäre Teil der Summe ergibt

$$S = \frac{\sin(\varphi - \psi) - \beta^2 \sin\varphi}{N},$$

somit

$$\Sigma = \alpha\, a \sin\varphi + \alpha' \beta' \beta\, a \frac{\sin(\varphi - \psi) - \beta^2 \sin\varphi}{N}.$$

Wir wollen hier die Glieder mit den Faktoren $\sin\varphi$ und $\cos\varphi$ noch trennen, erhalten somit

$$\Sigma = a \sin\varphi \left(\alpha + \alpha' \beta' \beta \frac{\cos\psi - \beta^2}{N}\right) - \cos\varphi \cdot \alpha' \beta' \beta \frac{\sin\psi}{N}.$$

Es ist also das Resultat wiederum eine schwingende Bewegung von derselben Schwingungsdauer, aber von verschiedener Amplitude und Phase.

Wir finden das Quadrat der Amplitude der resultierenden Schwingung aus der Gleichung

$$A^2 = a^2 \left(\alpha + \alpha' \beta' \beta \frac{\cos\psi - \beta^2}{N}\right)^2 + a^2 \alpha'^2 \beta'^2 \beta^2 \frac{\sin^2\psi}{N^2}.$$

(Siehe Bd. I § 73.) Dieser Größe setzen wir die Lichtstärke proportional. Sie gibt uns also ohne weiteres Aufschluß über die Intensität des reflektierten Lichts.

In ganz derselben Weise wie für das reflektierte können wir nun die Rechnung auch für das durchgehende Licht machen. Wir erhalten in E den Schwingungszustand

$$\sigma' = \alpha' \beta' a \sin \frac{2\pi}{\tau}\left(t - \frac{AB}{c'} - \frac{BE}{c}\right),$$

in E'

$$\sigma'' = \alpha' \beta' \beta^2 a \sin \frac{2\pi}{\tau}\left(t - \frac{3\,AB}{c'} - \frac{B'E'}{c}\right)$$

usw. Wir führen

$$\frac{2\pi}{\tau}\left(t - \frac{AB}{c'} - \frac{BE}{c}\right) = \chi$$

ein und können so für die Summe sämtlicher $\sigma$ schreiben

$$\Sigma' = \alpha' \beta' \mathrm{a} \sin\chi + \alpha' \beta' \beta^2 \mathrm{a} \sin(\chi - \psi) + \alpha' \beta' \beta^4 \mathrm{a} \sin(\chi - 2\psi) + \ldots,$$

was nach dem früheren Vorgang

$$\Sigma' = \alpha' \beta' \mathrm{a} \frac{\sin\chi - \beta^2 \sin(\chi + \psi)}{\mathrm{N}}$$

ergibt.

Es handelt sich für uns jetzt darum, die Beziehung zwischen $\alpha$, $\alpha'$, $\beta$ und $\beta'$ zu ermitteln. Wir benützen dazu die Erfahrungstatsache, daß von einem unendlich dünnen Blättchen kein Licht reflektiert wird, sondern alles durchgeht. Für ein solches wird $\psi = 0$, folglich

$$\Sigma = 0 = \mathrm{a} \sin\varphi \left(\alpha + \alpha' \beta' \beta \frac{1 - \beta^2}{1 - 2\beta^2 + \beta^4}\right),$$

$$\Sigma' = \mathrm{a} \sin\chi = \mathrm{a}\, \alpha' \beta' \sin\chi \frac{1 - \beta^2}{1 - 2\beta^2 + \beta^4}.$$

Es muß somit

$$\alpha + \frac{\alpha' \beta' \beta}{1 - \beta^2} = 0,$$

$$\alpha' \beta' \frac{1 - \beta^2}{1 - 2\beta^2 + \beta^4} = \frac{\alpha' \beta'}{1 - \beta^2} = 1$$

sein. Danach reduziert sich die vorletzte Gleichung auf $\alpha + \beta = 0$ oder

$$\alpha = -\beta.$$

Das besagt, daß sich die Amplitude bei einer Reflexion umkehren muß. Es bleibt jedoch unentschieden, ob dies bei der äußeren oder bei der inneren Reflexion geschieht.

Jetzt können wir uns auch eine Vorstellung von dem Quadrat der resultierenden Amplitude im reflek-

tierten und durchgehenden Licht machen. Der Ausdruck

$$\left(\alpha + \alpha'\beta'\beta\frac{\cos\psi - \beta^2}{N}\right)^2 = \left[-\beta + (1-\beta^2)\beta\frac{\cos\psi - \beta^2}{N}\right]^2$$

$$= \frac{\beta^2(1+\beta^2)^2(1-\cos\psi)^2}{N^2},$$

was sich durch Ausmultiplizieren leicht finden läßt. Wir haben somit

$$\frac{A^2}{a^2\beta^2} = \frac{(1+\beta^2)^2(1-\cos\psi)^2 + (1-\beta^2)^2\sin^2\psi}{N^2}$$

$$= \frac{2(1-\cos\psi)}{N}.$$

Wird demnach $\cos\psi = 1$, d, i. für $\psi = 0,\ 2\pi, \ldots$, so wird kein Licht reflektiert, für $\psi = \pi,\ 3\pi \ldots$ werden wir hingegen das Maximum der Lichtstärke erhalten.

Verfahren wir mit dem durchgelassenen Licht $\Sigma'$ genau so wie mit dem reflektierten, so finden wir für das Quadrat der Amplitude

$$B^2 = \frac{a^2(1-\beta^2)^2}{N}.$$

Hier kann also nie völlige Dunkelheit eintreten, wohl gibt es aber auch ein Minimum der Lichtstärke, d. i. für $\cos\psi = 0$, also für $\psi = \pi,\ 3\pi, \ldots$ Haben wir also im reflektierten Licht das Maximum der Intensität, so ist im durchgelassenen das Minimum und umgekehrt. Man sagt, die Erscheinungen im reflektierten und durchgelassenen Licht sind zueinander komplementär. Beide Intensitäten geben zusammen die ursprüngliche; denn es ist

$$A^2 + B^2 = a^2.$$

Wir haben noch zu erklären, weshalb wir die

Lichtintensität proportional dem Quadrat der Amplitude der schwingenden Bewegung setzen. Die Lichtstärke ist offenbar proportional der lebendigen Kraft der schwingenden Bewegung. Ändert sich nun der Schwingungszustand nach der Gleichung

$$\sigma = a \sin \frac{2\pi t}{\tau},$$

so wird die jeweilige Geschwindigkeit der sich bewegenden Teilchen dem Ausdruck

$$\frac{d\sigma}{dt} = \frac{2\pi}{\tau} a \cos \frac{2\pi t}{\tau}$$

proportional sein. Die lebendige Kraft ist demnach der Größe $\left(\frac{d\sigma}{dt}\right)^2$ und damit $a^2$ proportional. Da wir die Schwingungsdauer als unabhängig von der Intensität halten, so ändert sich der Mittelwert der lebendigen Kraft tatsächlich nur mit dem Quadrat der Amplitude.

## § 17. Newtons Farbenglas.

Legen wir auf eine planparallele Glasplatte eine sehr flache konvexe Linse (Fig. 24), so begrenzen wir damit eine Luftschicht von veränderlicher Dicke, welche in der Mitte unendlich dünn wird. Man nennt diese Anordnung „Newtons Farbenglas". Eine solche Luftschicht muß nach dem vorhergehenden Paragraphen sowohl im durchgehenden als reflektierten Licht Interferenzerscheinungen zeigen. An einer bestimmten Stelle vom Radius x hat die Luftschicht die Dicke

$$MN = AB = R - \sqrt{R^2 - x^2} = \frac{x^2}{2R},$$

wenn wir den Krümmungsradius R der Linse gegen-

über x sehr groß annehmen. Wir erhalten nach § 16 für $\psi = 0, 2\pi \ldots$ im reflektierten Licht Dunkelheit. Lassen wir das Licht senkrecht auffallen, so wird AB = d (Fig. 23), wenn wir unter d die Dicke der Schicht verstehen, AD = 0. Mithin ist

$$\psi = \frac{4\pi d}{c'\tau}.$$

Es ist aber $c'\tau = \lambda'$ die Wellenlänge des Lichts in der Platte. Wir haben demnach Dunkelheit für $d = 0, \frac{\lambda'}{2}, \frac{2\lambda'}{2}, \frac{3\lambda'}{2} \ldots$, das ist für $x^2 = 0, \lambda' R, 2\lambda' R, \ldots$ Wir erhalten demnach in unserm Farbenglas dunkle

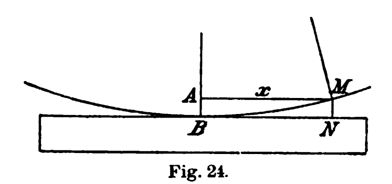


Fig. 24.

Kreise, deren Radien sich der Reihe nach wie $0 : 1 : \sqrt{2} : \sqrt{3} \ldots$ verhalten. Bei Licht, welches aus mehreren Farben zusammengesetzt ist, entstehen natürlich entsprechende farbige Ringe.

## § 18. Wirkung dünner Blättchen bei schief auffallendem Licht — Talbots Linien.

Auf ein Blättchen von der Dicke d (Fig. 25) falle Licht unter dem Winkel $\alpha$ auf, welches unter dem Winkel $\beta$ im Blättchen weitergeht. In der Formel

$$\psi = \frac{2\pi}{\tau}\left(\frac{2\,AB}{c'} - \frac{AD}{c}\right)$$

(§ 16) wollen wir AB und AD durch Blättchendicke, Einfalls- und Brechungswinkel ausdrücken. Wir haben

$$d = \overline{AB} \cdot \cos\beta\,,$$

ferner

$$AD = \overline{AA'} \cdot \sin\alpha = 2\,\overline{AB} \cdot \sin\beta \sin\alpha = \frac{2\,d \sin\beta \sin\alpha}{\cos\beta}\,,$$

folglich

$$\psi = \frac{2\pi}{\tau}\left(\frac{2\,d}{c' \cos\beta} - \frac{2\,d \sin\alpha \sin\beta}{c \cos\beta}\right)$$

$$= \frac{4\pi d}{c' \tau \cos\beta}\left(1 - \frac{c'}{c} \sin\alpha \sin\beta\right)$$

$$= \frac{4\pi d}{\lambda' \cos\beta}(1 - \sin^2\beta) = \frac{4\pi d}{\lambda'} \cos\beta\,,$$

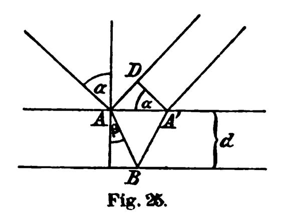



Fig. 25.

indem ja $\frac{c'}{c} \sin\alpha = \frac{\sin\alpha}{n} = \sin\beta$ ist. Für $\psi = 0, 2\pi, \ldots$ haben wir wiederum Dunkelheit im reflektierten Licht. Indem die Strahlen schief auffallen, erzielen wir also den Effekt, als würde das Blättchen dünner.

Wir setzen nun voraus, unser Blättchen sei so dick, daß die Formel

$$\frac{4\pi d}{\lambda'} \cos\beta = 2\,m\,\pi\,,$$

nach welcher wir Dunkelheit erhalten, erst für ein größeres m erfüllt ist. Gehen wir vom roten zum violetten Licht über, so wird die Wellenlänge etwa halb so groß. Es muß daher wiederum für den Fall der Dunkelheit m sich etwa verdoppeln. Haben wir daher weißes Licht, so werden durch unser Blättchen in demselben alle jene Lichtsorten verlöschen, deren Wellenlängen obige Gleichung erfüllen, wenn wir der Reihe nach anstatt m die Werte $m + 1$, $m + 2 \ldots 2m$ einsetzen. Wir können dies dadurch nachweisen, daß wir das Licht nach der Reflexion durch ein Prisma gehen lassen. Wir erhalten dann ein Spektrum mit m dunklen Streifen, welche nach ihrem Entdecker den Namen Talbotsche Linien führen.

## § 19. Beugung des Lichts.

Fresnel machte vom Huygensschen Prinzip folgende Anwendung. Er sagt: Von allen Punkten einer

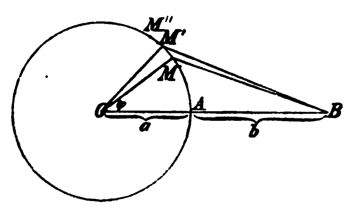



Fig. 26.

Kugelwelle (Fig. 26) gelangt Licht nach dem Punkt B. Derselbe erscheint aber nur deshalb nicht heller, als würde er von einem geraden Strahl von O aus getroffen, weil die Strahlen MB, M'B usw. verschiedene Wege zurücklegen, sich infolgedessen durch Interferenz gegenseitig auslöschen.

Wir denken uns auf der Kugel durch M einen Kreis gezogen, indem wir die Kugel einfach um OB rotieren lassen. Die Fläche der Kugelkalotte zwischen A und M ist dann

$$F = 2\pi a^2 (1 - \cos\varphi) .$$

Ferner ist

$$\overline{BM}^2 = a^2 + (a + b)^2 - 2a(a + b)\cos\varphi$$
$$= b^2 + 2a(a + b)(1 - \cos\varphi) ,$$

folglich

$$1 - \cos\varphi = \frac{\overline{BM}^2 - b^2}{2a(a + b)} .$$

Wir erhalten sonach

$$F = \frac{\pi a}{a + b}(\overline{BM}^2 - b^2)$$

und analog

$$F' = \frac{\pi a}{a + b}(\overline{BM'}^2 - b^2)$$

usw. Wir setzen nun

$$F' - F = f = \frac{\pi a}{a + b}(\overline{BM'}^2 - \overline{BM}^2) ,$$

$$f' = \frac{\pi a}{a + b}(\overline{BM''}^2 - \overline{BM'}^2)$$

usf. Wir machen jetzt die Voraussetzung, daß

$$BM' - BM = BM'' - BM' = BM''' - BM'' = \ldots = p$$

ist. Dann wird

$$f = \frac{\pi a p}{a + b}(BM' + BM) ,$$

$$f' = \frac{\pi a p}{a + b}(BM'' + BM') ,$$

$$f'' = \frac{\pi a p}{a + b}(BM''' + BM''),$$

. . . . . . . . . .

Daraus folgt nun

$$f - 2f' + f'' = 0 .$$

Die Fläche einer jeden derartigen Kugelzone ist also gleich der halben Flächensumme der beiden benachbarten Zonen, oder es wird vom

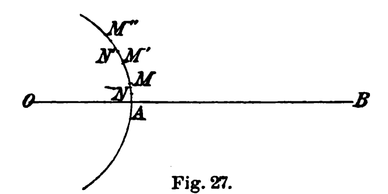



Fig. 27.

Punkt O aus durch jede Zone gerade halb so viel Licht gehen als durch ihre beiden Nachbarzonen zusammen.

Wählen wir nun die Punkte M, M′, ... so, daß

$$MB - AB = M'B - MB = \ldots = \frac{\lambda}{2},$$

so wird sämtliches Licht, welches durch MM′ (Fig. 27) geht, durch jenes, welches bei MN und M′N′ passiert, aufgehoben; und so geht es über die ganze Kugelfläche fort. Also nur jenes Licht, welches durch den kleinen Kreis AN geht, wird in B nicht vernichtet.

Der Punkt B wird also bei voller Beleuchtung nicht heller erscheinen, als wenn wir in A einen Schirm mit einer Öffnung vom Radius AN anbringen. Vergrößern wir jetzt die Öffnung, so wird B noch heller werden. Die Helligkeit wird jedoch bei weiterer Vergrößerung wieder schwächer, und wir werden

die schwächste Beleuchtung haben, wenn die Öffnung den Radius AM′ hat. Dann wird das Licht wieder heller usw. Ebenso können wir aber auch nach A einen kleinen kreisförmigen Schirm bringen. Hat er den Radius AN, so wird in B kein Licht sein; wird er größer, so wird es in B hell. Bei weiterer Vergrößerung wird B wieder dunkel usf. Die Lichtstrahlen erleiden also eine Ablenkung, so oft sie nahe an der Kante eines Schirms vorübergehen. Man nennt diese Erscheinung „Beugung des Lichts".

### § 20. Beugung durch eine Spalte.

Der Schirm OX (Fig. 28) besitze eine Spalte AA′, auf welche unter dem Winkel $\alpha$ eine Planwelle AB

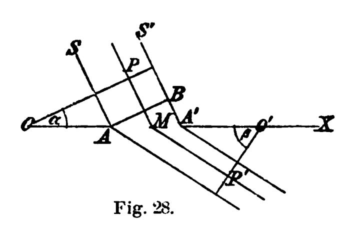



Fig. 28.

fällt. Der Schirm sei gleichzeitig die Grenze zweier verschiedener Medien. Im oberen sei die Lichtgeschwindigkeit c, im unteren c′. Bei P haben wir den Schwingungszustand:

$$\sigma = a \sin \frac{2\pi}{\tau} t \,.$$

In P′ haben wir dann

$$\sigma' = a \sin \frac{2\pi}{\tau}\left(t - \frac{PM}{c} - \frac{MP'}{c'}\right).$$

Dorthin gelangt das Licht unter dem Winkel $\beta$ zum Lot, und die gesamte Lichtmenge wird sich darstellen lassen durch

$$l = \gamma a \sin \frac{2\pi}{\tau}\left(t - \frac{PM}{c} - \frac{MP'}{c'}\right) df,$$

wenn wir unter $df$ ein Flächenelement der Spalte im Punkt M verstehen, während $\gamma$ jener Bruchteil des Lichts ist, der in das untere Medium eindringt. Wir setzen nun $OM = x$, also

$$PM = x \sin\alpha, \quad MP' = (p - x)\sin\beta,$$

wobei $OO' = p$ ist. Ferner sei noch $df = dx\,dy$, dann

$$l = \gamma a \sin \frac{2\pi}{\tau}\left(t - \frac{x\sin\alpha}{c} - \frac{p\sin\beta}{c'} + \frac{x\sin\beta}{c'}\right) dx\,dy.$$

Integrieren wir über den ganzen Spalt, so wird aus $dy$ einfach die Höhe h des Spalts, und es bleibt uns für die gesamte Lichtmenge L der Ausdruck

$$\begin{aligned}
L &= \gamma a h \int_{x_0}^{x_0+b} \sin \frac{2\pi}{\tau}\left(t - \frac{x\sin\alpha}{c} - \frac{p\sin\beta}{c'} + \frac{x\sin\beta}{c'}\right) dx \\
&= \gamma a h \int_{x_0}^{x_0+b} \sin(\varphi - m x)\, dx \\
&= \frac{\gamma a h}{m}\left[\cos(\varphi - m x_0 - m b) - \cos(\varphi - m x_0)\right] \\
&= \frac{2\gamma a h}{m} \sin\left(\varphi - m x_0 - \frac{m b}{2}\right) \sin\frac{m b}{2} \\
&= \gamma a b h \sin\left(\varphi - m x_0 - \frac{m b}{2}\right) \frac{\sin\frac{m b}{2}}{\frac{m b}{2}}, \qquad (15)
\end{aligned}$$

wobei wir

$$\frac{2\pi}{\tau}\left(t - \frac{p \sin\beta}{c'}\right) = \varphi, \quad \frac{2\pi}{\tau}\left(\frac{\sin\alpha}{c} - \frac{\sin\beta}{c'}\right) = m$$

gesetzt haben und unter $b = AA'$ die Breite des Spalts verstehen. Die Amplitude der neuen Lichtbewegung ist also

$$A = \gamma\, a\, b\, h \frac{\sin\frac{m b}{2}}{\frac{m b}{2}}.$$

Sie ist eine periodische Funktion von m. Ihr Maximum hat sie für $m = 0$. Das ist der Fall, wenn

$$\frac{\sin\alpha}{c} - \frac{\sin\beta}{c'} = 0,$$

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \frac{c}{c'} = n$$

wird. Das Maximum der Beleuchtung haben wir demnach dort, wohin der Strahl nach dem Brechungsgesetz zu fallen hat.

Für die Folge wollen wir annehmen, daß auf beiden Seiten des Schirms dasselbe Medium, also $c = c'$ ist. Ferner sollen die Strahlen senkrecht einfallen. Es muß somit $\alpha = 0$ sein, und wir haben

$$m = -\frac{2\pi \sin\beta}{\lambda}.$$

Was nun die Lichtintensität für verschiedene $\beta$ betrifft, so handelt es sich um den Faktor

$$\frac{\sin\frac{(b\pi\sin\beta)}{\lambda}}{\frac{b\pi\sin\beta}{\lambda}}.$$

Das Licht wird also durch unsere Spalte so gebeugt, daß für $\beta = 0$ die größte Lichtintensität vorhanden ist. Nach links und rechts nimmt sie sodann ab, bis für

$$\sin\beta = \frac{\lambda}{b}$$

Dunkelheit eintritt. Für größere $\beta$ haben wir dann wieder Licht, hierauf wieder Dunkelheit usw., doch da der Bogen gegenüber dem Sinus rasch wächst, so nimmt mit wachsendem $\beta$ auch die Intensität der Maxima bald ab.

### § 21. Beugung durch zwei Spalten — Interferenzversuche von Young und Arago.

Der Schirm $OO'$ (Fig. 29) besitze zwei parallele Spalten $AA'$ und $BB'$ von gleicher Breite b und gleicher

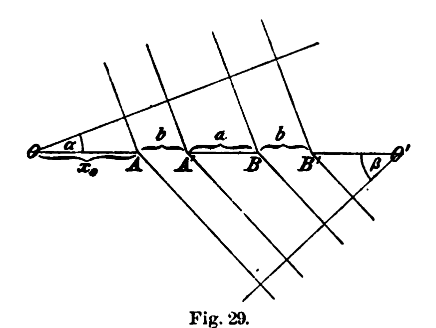



Fig. 29.

Höhe h. Der Zwischenraum beider Spalten habe die Breite B. Das Licht falle unter dem Winkel $\alpha$ auf, und wir fragen nach der Lichtmenge, welche unter dem Winkel $\beta$ unterhalb des Schirms austritt. Wir brauchen also für die beiden Spalten bloß die Formel des vorigen

Paragraphen anzuwenden und zu addieren. Demnach haben wir für die erste Spalte

$$\sigma = \gamma\, a\, b\, h \sin\left(\varphi - m x_0 - \frac{m b}{2}\right) \frac{\sin \frac{m b}{2}}{\frac{m b}{2}},$$

für die zweite

$$\sigma' = \gamma\, a\, b\, h \sin\left(\varphi - m x_0 - m B - m b - \frac{m b}{2}\right) \frac{\sin \frac{m b}{2}}{\frac{m b}{2}},$$

indem wir bei der zweiten anstatt $x_0$ den Wert $x_0 + B + b$ zu setzen haben. Die Summe beider Lichtmengen ist also

$$\sigma + \sigma' = \gamma a b h \frac{\sin \frac{m b}{2}}{\frac{m b}{2}} \cdot 2 \sin\left(\varphi - m x_0 - \frac{m B + m b}{2} - \frac{m b}{2}\right)$$

$$\times \cos \frac{m B + m b}{2},$$

für die resultierende Amplitude erhalten wir

$$A = 2 \gamma\, a\, b\, h \frac{\sin \frac{m b}{2}}{\frac{m b}{2}} \cos \frac{m B + m b}{2}.$$

Wiederum sei oben und unten dasselbe Medium und der Einfallswinkel $\alpha = 0$, also $m = -\frac{2 \pi \sin \beta}{\lambda}$. Mit wachsendem Winkel $\beta$ erhalten wir wieder Maxima und

Minima der Beleuchtung. Jene, welche von dem Faktor $\frac{\sin\frac{mb}{2}}{\frac{mb}{2}}$ herrühren, nennt man die **Maxima** bezgl. **Minima erster Klasse**, jene des Faktors $\cos\frac{mB+mb}{2}$ die **zweiter Klasse**. Die Minima zweiter Klasse werden also eintreten für

$$\frac{mB+mb}{2} = \pm\frac{\pi}{2},\quad \pm\frac{3\pi}{2},\ldots,$$

das ist für

$$\sin\beta = \pm\frac{\lambda}{2(B+b)},\quad \pm\frac{3\lambda}{2(B+b)},\ldots.$$

Man nennt diese Erscheinung „**Youngs Interferenzversuch**", welche **Arago** dahin abgeändert hat, daß er vor die eine Spalte ein dünnes Blättchen gab. Dadurch wird der Strahlengang verzögert, und die Folge ist, daß die Symmetrielinie der Erscheinung gegen die Symmetrielinie der beiden Spalten verschoben ist.

## § 22. Fraunhofers Gitter.

Bringen wir auf einem Schirm eine Reihe gleichweit voneinander abstehender Spalten an, so erhalten wir ein **Fraunhofersches Gitter**. Dieses zeigt Interferenzerscheinungen, welche wir nach derselben Methode wie den Youngschen Versuch im vorhergehenden Paragraphen herleiten können. Das Gitter soll n Spalten besitzen. Wir haben somit n Gleichungen von der Form der Gleichung (15) zu addieren, welche sich nur dadurch voneinander unterscheiden, daß wir

in der zweiten anstatt $x_0$ die Größe $x_0 + B + b$, in der dritten $x_0 + 2(B + b)$ usw. zu setzen haben. Ferner fü wir noch die Größen

$$\psi = \varphi - m x_0 - \frac{m b}{2}, \quad \eta = m(B + b)$$

ein und erhalten somit schließlich das Resultat

$$\Sigma = \gamma\, a\, b\, h \frac{\sin\frac{m b}{2}}{\frac{m b}{2}} \{\sin\psi + \sin(\psi - \eta) + \sin(\psi - 2\eta)$$

$$+ \ldots + \sin[\psi - (n-1)\eta]\}.$$

Die Summierung dieser Reihe geschieht auf dieselbe Weise wie in § 16. Wir können schreiben

$$R + S i = e^{\psi i} + e^{(\psi - \eta) i} + e^{(\psi - 2\eta) i} + \ldots$$

$$+ e^{[\psi - (n-1)\eta] i} = e^{\psi i} \frac{1 - e^{-n\eta i}}{1 - n^{-\eta i}}$$

$$= \frac{e^{\psi i}(1 - e^{-n\eta i})(1 - e^{\eta i})}{2(1 - \cos\eta)}$$

$$= \frac{e^{\psi i} \cdot e^{-\frac{n\eta i}{2}}\left(e^{\frac{n\eta i}{2}} - e^{-\frac{n\eta i}{2}}\right) e^{\frac{\eta i}{2}}\left(e^{-\frac{\eta i}{2}} - e^{\frac{\eta i}{2}}\right)}{2(1 - \cos\eta)}$$

$$= \frac{e^{\left(\psi - \frac{n\eta}{2} + \frac{\eta}{2}\right) i} \cdot 2 i \sin\frac{n\eta}{2} \cdot - 2 i \sin\frac{\eta}{2}}{2(1 - \cos\eta)}.$$

Danach erhalten wir

$$S = \sin\left(\psi - \frac{n\eta}{2} + \frac{\eta}{2}\right) \frac{2 \sin\frac{n\eta}{2} \sin\frac{\eta}{2}}{1 - \cos\eta}.$$

Die Amplitude des resultierenden Lichts wird nun

$$A = \gamma a b h \frac{\sin \frac{m b}{2}}{\frac{m b}{2}} \cdot \frac{\sin \frac{n m (B + b)}{2}}{\sin \frac{m (B + b)}{2}} .$$

Es ergeben sich somit wiederum **Maxima** und **Minima erster und zweiter Klasse.** Was die Sichtbarkeit anbelangt, so wird die Intensität der Maxima zweiter Klasse um so größer werden, je größer n ist. Für diese Maxima haben wir nämlich

$$\sin \frac{m (B + b)}{2} = 0 ,$$

also

$$\frac{m (B + b)}{2} = \pm \pi , \quad \pm 2 \pi , \ldots$$

Es wird dann

$$\frac{\sin \frac{n m (B + b)}{2}}{\sin \frac{m (B + b)}{2}} = n .$$

Ist demnach n groß genug, so werden die Maxima erster Klasse gegenüber jenen zweiter ganz verschwinden. Erinnern wir uns, daß $m = - \frac{2 \pi \sin \beta}{\lambda}$ ist, so finden wir ohne weiteres für die Maxima zweiter Klasse

$$\sin \beta = \pm \frac{\lambda}{B + b} , \quad \pm \frac{2 \lambda}{B + b} , \ldots$$

$$n (B + b) = A$$

ist die Gesamtbreite unseres Gitters. Kennen wir daher die Zahl der Linien, so finden wir aus der Breite des Gitters leicht die Größe $B + b$. Damit ist uns die

Möglichkeit gegeben, die Wellenlänge des Lichts aufs genaueste zu bestimmen. Die Winkel, bei welchen die einzelnen Maxima auftreten, werden um so größer sein, je größer die Zahl der Spalten auf der Längeneinheit des Gitters ist. Ist das Licht eine Mischfarbe, so wird es durch das Gitter in die einzelnen Farben infolge der verschiedenen Wellenlängen $\lambda$ zerlegt. Wir erhalten ein Gitterspektrum.

## § 23. Polarisation des Lichts bei der Reflexion — Gleichungen von Fresnel.

Malus machte die Beobachtung, daß Licht, durch einen Turmalin betrachtet, verschiedene Erscheinungen hervorruft, je nachdem es direkt oder erst nach vorhergegangener Reflexion an einer ebenen Fläche den Turmalin passiert. Das Licht erfährt also durch die Reflexion eine Veränderung, die man Polarisation nennt. Fresnel wußte diese Erscheinung in mathematische Formeln zu fassen, er sah sich jedoch dabei genötigt anzunehmen, daß die Ätherteilchen Schwingungen vollführen, welche senkrecht zur Fortpflanzungsrichtung des Lichts stattfinden. Wir können von dieser kühnen Hypothese jedoch absehen, wenn wir anstatt der Schwingung eines Teilchens den Bewegungszustand der Ätherteilchen einführen. Welche Bewegung die einzelnen Ätherteilchen dabei machen, brauchen wir gar nicht zu wissen, wenn sich nur der ganze Bewegungszustand durch einen Vektor darstellen läßt, welcher senkrecht auf der Fortpflanzungsrichtung ist. Auch bei dieser Annahme können wir den Weg Fresnels zur Herleitung der Polarisationsgleichungen einschlagen. Nach ihm gelten folgende Sätze:

1. Es muß die lebendige Kraft des einfallenden Strahls gleich der Summe der lebendigen Kräfte des reflektierten und gebrochenen Strahls sein.
2. In der Trennungsebene beider Medien muß Kontinuität vorhanden sein. Das heißt: in der Trennungsebene muß die Summe der Bewegung im ersten Medium gleich der Bewegung im zweiten sein.

Wir wollen nun daran gehen, die lebendige Kraft einer Welle aufzusuchen. Wir setzen voraus, daß unsere Lichtwelle eine Planwelle parallel zur xz-Ebene eines rechtwinkligen Koordinatensystems (Fig. 30) sei. Ihre Breite sei g, ihre Höhe h. Der Bewegungszustand im Anfangspunkt sei gegeben durch

$$\sigma = a \sin \frac{2\pi t}{\tau}.$$

Fig. 30.

Dann haben wir in der Entfernung x die Bewegung

$$\sigma = a \sin \frac{2\pi}{\tau}\left(t - \frac{x}{c}\right),$$

wenn c die Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Lichts ist. Im Punkt P denken wir uns zwei parallele Ebenen senkrecht zur x-Achse, welche um dx voneinander entfernt sind. Diese schneiden aus der Lichtwelle ein Volumen g h d x von der Masse $\varrho$ g h d x. Wir nehmen also an, die Dichte des Äthers sei $\varrho$. Die Lichtbewegung wird daher in diesem Volumen eine lebendige Kraft

$$dL = \frac{1}{2} k \varrho g h \, dx \left(\frac{d\sigma}{dt}\right)^2$$

besitzen, wobei k der entsprechende Proportionalitätsfaktor ist. Integrieren wir diesen Ausdruck von 0 bis $\lambda$, so erhalten wir die gesamte lebendige Kraft einer Welle, Sie ist somit

$$L = \frac{1}{2} k \varrho g h \int_0^\lambda \left(\frac{d\sigma}{dt}\right)^2 dx = \frac{2\pi^2 k \varrho g h a^2}{\tau^2} \int_0^\lambda \cos^2 \frac{2\pi}{\tau}\left(t - \frac{x}{c}\right) dx$$

$$= \frac{2\pi^2 k \varrho g h a^2}{\tau^2} \int_0^\lambda \left[\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 4\pi \left(\frac{t}{\tau} - \frac{x}{\lambda}\right)\right] dx$$

$$= \frac{\pi^2 k \varrho g h a^2 \lambda}{\tau^2} .$$

Für die lebendige Kraft einer Welle im reflektierten Licht ändert sich in dem ganzen Ausdruck nichts als die Größe a. Wir wollen sie für dieses Licht $a'$ nennen. Im gebrochenen Licht haben wir jedoch auch eine andere Dichte $\varrho$, ein anderes h und $\lambda$. Wir wollen hier analog $a_1$, $\varrho_1$, $h_1$ und $\lambda_1$ einführen. Somit muß folgende Gleichung gelten:

$$\frac{\pi^2 k \varrho g h a^2 \lambda}{\tau^2} = \frac{\pi^2 k \varrho g h a'^2 \lambda}{\tau^2} + \frac{\pi^2 k \varrho_1 g h_1 a_1^2 \lambda^2}{\tau^2}$$

oder

$$(16) \qquad \varrho h a^2 \lambda = \varrho h a'^2 \lambda = \varrho_1 h_1 a_1^2 \lambda_1 .$$

Es ist nun nach Fig. 31

$$h : h_1 = \cos\alpha : \cos\beta ,$$

ferner

$$\lambda = c\tau , \quad \lambda_1 = c_1 \tau ,$$

wenn c und $c_1$ die Lichtgeschwindigkeiten oben und

unten sind. Daraus folgt

$$\frac{\lambda}{\lambda_1} = \frac{c}{c_1} = n = \frac{\sin\alpha}{\sin\beta}.$$

Demnach können wir die Gleichung (16) schreiben

$$\varrho\,(a^2 - a'^2)\sin\alpha\cos\alpha = \varrho_1\, a_1^2 \sin\beta\cos\beta\,.$$

Fresnel macht nun weiter die Annahme, daß sich die Größe der Lichtgeschwindigkeit aus ähnlichen Elementen wie die Schallgeschwindigkeit zusammensetzt. Er schreibt daher

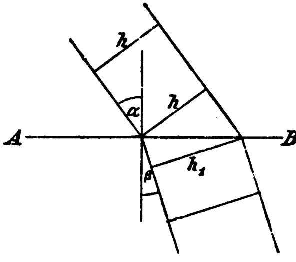


Fig. 31.

$$c = \sqrt{\frac{E}{\varrho}}\,,$$

wobei wir unter E die Elastizität des Äthers verstehen können. Mit der Annahme, E sei für alle Körper gleich, folgt

$$c_1 = \sqrt{\frac{E}{\varrho_1}}\,,$$

wonach

$$\frac{c^2}{c_1^2} = \frac{\varrho_1}{\varrho} = \frac{\sin^2\alpha}{\sin^2\beta}$$

gesetzt werden kann. Obige Gleichung der lebendigen Kraft wird somit

$$(a^2 - a'^2)\sin\alpha\cos\alpha\sin^2\beta = a_1^2\sin\beta\cos\beta\sin^2\alpha$$

oder

$$(a^2 - a'^2)\cos\alpha\sin\beta = a_1^2\cos\beta\sin\alpha\,. \qquad (17)$$

Wir haben jetzt noch die Gleichungen der Kontinuität zu entwickeln. Wir wissen, daß der

Schwingungszustand durch einen Vektor ausgedrückt werden kann, welcher senkrecht zur Fortpflanzungsrichtung des Lichts steht. Wir zerlegen diesen Vektor in zwei Komponenten, deren eine in der Einfallsebene, während die andere senkrecht dazu ist. Diese wollen wir zuerst betrachten. Sie fällt in die Trennungsebene selbst hinein, und es muß zur Aufrechterhaltung der Kontinuität der Zustand $\sigma_1$ im unteren Medium gleich der Summe $\sigma + \sigma'$ im oberen sein. Daraus folgt

$$(18) \qquad a + a' = a_1 ,$$

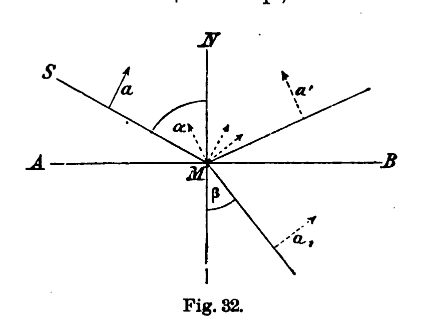



Fig. 32.

was in Gleichung (17) eingesetzt

$$(a - a') \cos\alpha \sin\beta - (a + a') \cos\beta \sin\alpha = 0$$

ergibt, was sich weiter umwandeln läßt in

$$a(\cos\alpha \sin\beta - \sin\alpha \cos\beta) = a \sin(\beta - \alpha) = a' \sin(\alpha + \beta),$$

$$(19) \qquad a' = - a \frac{\sin(\alpha - \beta)}{\sin(\alpha + \beta)} .$$

Es kehrt sich also die Amplitude im reflektierten Licht um. Für die Amplitude im gebrochenen Strahl finden wir aus den Gleichungen (17) und (18)

(20) $$a_1 = a \frac{2 \cos\alpha \sin\beta}{\sin(\alpha + \beta)} .$$

Für die Komponente in der Einfallsebene haben wir eine bestimmte Richtung als positiv anzunehmen. Es sei jene des Vektors a (Fig. 32). Diesen Vektor wollen wir im Punkt M abermals in eine Komponente in der Trennungsebene AB und eine im Einfallslot MN zerlegen. Es muß also dann der Kontinuität halber

(21) $$a \cos\alpha - a' \cos\alpha = a_1 \cos\beta ,$$

ferner

(22) $$a \sin\alpha + a' \sin\alpha = a_1 \sin\beta$$

sein. Wenn wir die Gleichungen (21) und (22) miteinander multiplizieren, so gelangen wir in Widerspruch mit der Gleichung (17). Fresnel nahm daher an, daß die Gleichung (22) den Vorgängen in der Wirklichkeit nicht entspricht.

Dividieren wir Gleichung (17) durch Gleichung (21), so erhalten wir

$$(a + a') \sin\beta = a_1 \sin\alpha .$$

Wir multiplizieren diese Gleichung mit $\cos\beta$, hingegen die Gleichung (21) mit $\sin\alpha$ und subtrahieren beide voneinander. Es bleibt dann

$$(a + a') \sin\beta \cos\beta - (a - a') \sin\alpha \cos\alpha = 0 ,$$

woraus weiter folgt

$$a' = a \frac{\sin 2\alpha - \sin 2\beta}{\sin 2\alpha + \sin 2\beta} = a \frac{\cos(\alpha + \beta) \sin(\alpha - \beta)}{\sin(\alpha + \beta) \cos(\alpha - \beta)} .$$

Wir erhalten sonach für die Amplitude des reflektierten Lichts, welches in der Einfallsebene schwingt,

(23) $$a' = a \frac{\operatorname{tg}(\alpha - \beta)}{\operatorname{tg}(\alpha + \beta)} .$$

Ferner findet sich für die entsprechende Amplitude des gebrochenen Lichts wieder aus den Gleichungen (17) und (21) leicht

$$(24)\quad a_1 = a\frac{4\cos\alpha\sin\beta}{\sin 2\alpha + \sin 2\beta} = a\frac{2\cos\alpha\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta)}.$$

Wird $\alpha + \beta = \frac{\pi}{2}$, so wird $\operatorname{tg}(\alpha+\beta) = \infty$, also $a' = 0$. Wenn wir demzufolge Licht so einfallen lassen, daß $\alpha + \beta = \frac{\pi}{2}$ ist, so werden parallel zur Einfallsebene gehende Schwingungen überhaupt nicht reflektiert. Es ist für Glas dieser Winkel $\alpha$ etwa 57°. Man nennt ihn den Polarisationswinkel. Für den Polarisationswinkel ist also $\sin\beta = \cos\alpha$, daher

$$n = \frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \operatorname{tg}\alpha,$$

es ist die Tangente des Polarisationswinkels gleich dem Brechungsexponenten.

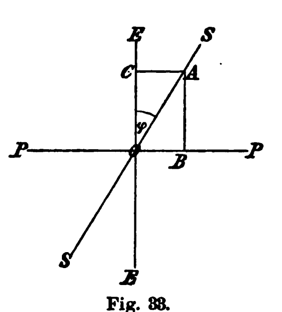


Fig. 33.

In Fig. 33 sei EE die Einfallsebene des Lichts, PP liege in der Trennungsebene der beiden Medien und stehe senkrecht auf EE. Die Schwingungen des Lichts finden in der Geraden SS statt. OA sei die Amplitude des einfallenden Lichts. Wir zerlegen sie in die Komponenten OB senkrecht und OC parallel zur Einfallsebene. Wir haben somit

$$OB = \overline{OA}\sin\varphi, \quad OC = \overline{OA}\cdot\cos\varphi.$$

Nach der Reflexion verwandelt sich OB nach Gleichung (19) in

$$OB' = -OB \frac{\sin(\alpha - \beta)}{\sin(\alpha + \beta)}$$

und nach Gleichung (23) OC in

$$OC' = \overline{OC} \cdot \frac{\operatorname{tg}(\alpha - \beta)}{\operatorname{tg}(\alpha + \beta)}.$$

Es ist nun

$$\frac{OB'}{OC'} = -\frac{OB}{OC} \frac{\cos(\alpha - \beta)}{\cos(\alpha + \beta)} = -\operatorname{tg}\varphi \cdot \frac{\cos(\alpha - \beta)}{\cos(\alpha + \beta)}.$$

Es werden sich nach der Reflexion die Komponenten sonach zu einer Schwingungsrichtung $\varphi'$ zusammensetzen, welche von der früheren abweicht. Wir haben nämlich

$$\operatorname{tg}\varphi' = \frac{OB'}{OC'} = -\operatorname{tg}\varphi \frac{\cos(\alpha - \beta)}{\cos(\alpha + \beta)}.$$

Es wird also durch die Reflexion eine Drehung der Schwingungsebene oder, wie man auch sagt, der Polarisationsebene bewirkt.

Wird $\alpha + \beta = \frac{\pi}{2}$, d. h. fällt das Licht unter dem Polarisationswinkel auf, so wird $\operatorname{tg}\varphi' = -\infty$, das reflektierte Licht schwingt parallel zur Trennungsebene beider Medien. Das natürliche Licht, dessen Schwingungen nach allen Richtungen in einer zum Lichtstrahl senkrechten Ebene gehen, wird daher, wenn es unter dem Polarisationswinkel reflektiert wird, nur noch Schwingungen in einer Richtung, nämlich parallel zur Trennungsebene machen, es ist vollkommen polarisiert. Lassen wir nun solches Licht unter dem Polarisationswinkel auf

einen Spiegel fallen, aber so, daß es *parallel* zur *Einfallsebene* schwingt, so wird es überhaupt *nicht mehr reflektiert.*

Wir wollen jetzt eine ähnliche Betrachtung für das gebrochene Licht anstellen. Für dieses seien die Komponenten $OB_1$ und $OC_1$, und wir haben nach den Gleichungen (20) und (24)

$$OB_1 = \overline{OB}\frac{2\cos\alpha\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)}, \quad OC_1 = \overline{OC}\frac{2\cos\alpha\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)\cos\alpha-\beta},$$

folglich

$$\operatorname{tg}\varphi_1 = \frac{OB_1}{OC_1} = \frac{OB}{OC}\cdot\cos(\alpha-\beta) = \operatorname{tg}\varphi\cos(\alpha-\beta).$$

Also auch bei der *Brechung* haben wir eine *Änderung der Schwingungsrichtung.* Lassen wir Licht durch eine planparallele Platte fallen, so haben wir bei der ersten Brechung

$$\operatorname{tg}\varphi_1 = \operatorname{tg}\varphi\cdot\cos(\alpha-\beta),$$

bei der zweiten

$$\operatorname{tg}\varphi_2 = \operatorname{tg}\varphi_1\cdot\cos(\beta-\alpha) = \operatorname{tg}\varphi\cdot\cos^2(\alpha-\beta).$$

Fällt das Licht durch n Platten, so haben wir

$$\operatorname{tg}\varphi_{2n} = \operatorname{tg}\varphi\cdot\cos^{2n}(\alpha-\beta).$$

Da nun $\cos(\alpha-\beta) < 1$, so nähert sich mit wachsender Zahl der Platten jedes $\varphi$ mehr jenem Winkel, für welchen $\operatorname{tg}\varphi_{2n} = 0$ ist, d. i. dem Winkel $\varphi_{2n} = 0$. Man nennt eine solche Reihe aufeinandergeschichteter planparalleler Platten einen *Plattensatz*, welcher ebenfalls die Fähigkeit hat, natürliches Licht in *teilweise polarisiertes* zu verwandeln, jedoch schwingt das polarisierte Licht dann in der Einfallsebene.

*Neumann* ging nun von der Anschauung aus, daß *die Dichte des Äthers in allen Körpern gleich,*

die Elastizität jedoch verschieden ist. Man erhält sodann aus der Gleichung (16)

$$(a^2 - a'^2) \sin\alpha \cos\alpha = a_1^2 \sin\beta \cos\beta \,,$$

und es stimmt dann auch die Gleichung (22) mit den anderen überein. Führen wir unter dieser Annahme in ganz derselben Weise wie früher die Berechnung der verschiedenen Amplituden durch, so erhalten wir zwar dieselben Formeln, doch erscheinen sie bezüglich der beiden Komponenten der Lichtschwingung vertauscht. Das heißt, nach Neumann gelten die Gleichungen (19) und (20) für das Licht, welches in der Einfallsebene schwingt, die Gleichungen (23) und (24) für jenes senkrecht zur Einfallsebene.

## § 24. Doppelbrechung.

Geht ein Lichtstrahl durch eine Kalkspatplatte, so wird er im allgemeinen in zwei polarisierte Lichtstrahlen zerlegt, deren Schwingungsebenen senkrecht zueinander liegen. Huygens erklärte diese Erscheinung wieder mit Hilfe der Elementarwellen. Diese sind im Kalkspat jedoch nicht Kugelwellen, sondern jeder vom Lichtstrahl getroffene Punkt des Kalkspats wird zum Erregungspunkt neuer Elementarwellen, deren eine eine Kugel, die andere ein Rotationsellipsoid darstellt, deren Rotationsachse die kleine Achse der Ellipse ist und die Größe des Durchmessers der Kugelwelle hat. Es liegt somit die Kugelwelle innerhalb des Ellipsoids und berührt

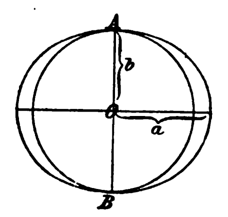


Fig. 34.

es in zwei Punkten A und B (Fig. 34). Die Richtung AB nennt man die optische Achse. Sie fällt beim Kalkspat mit der Verbindungsgeraden der stumpfen Rhomboederecken zusammen. Die Ebene, welche von der optischen Achse und dem Lichtstrahl gebildet wird, nennen wir den Hauptschnitt.

Wir denken uns den Kalkspat senkrecht zur optischen Achse ox (Fig. 35) geschliffen. Das Lichtbündel SS′ falle schief auf. In O entstehen sodann

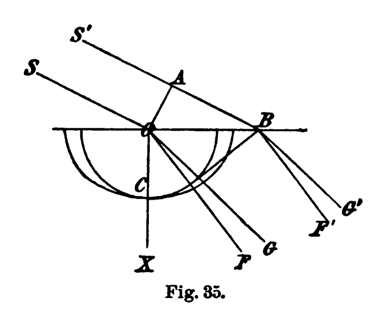


Fig. 35.

die zwei Elementarwellen, welche den Durchmesser bezüglich die kleine Achse OC erreicht haben, wenn der Punkt A der Lichtwelle nach B kommt. Die Tangenten von B an die Kugel bezüglich Ellipsoidfläche ergeben dann die zwei neuen Planwellen, welche in den Richtungen F und G ihren Weg fortsetzen. Das Licht hat also tatsächlich eine Doppelbrechung erlitten. Würde es, anstatt schief, senkrecht einfallen, so wäre keine Brechung vorhanden.

Dies ist nicht mehr der Fall, wenn wir den Kalkspat schief zur optischen Achse schleifen. Es ergibt dann Fig. 36, in welcher OX die optische Achse

sein soll, zwei Wellen, deren eine ungebrochen in der Richtung AB durch den Kalkspat geht, während die andere gebrochen wird und die Richtung AC einschlägt. Der ungebrochene Lichtstrahl, dessen Elementarwellen Kugelflächen sind, heißt der ordentliche Strahl. Er ist immer senkrecht zum Hauptschnitt polarisiert. Der andere jedoch, der außerordentliche Strahl, rührt von den Ellipsoiden her, und sein Licht schwingt parallel zum Hauptschnitt. Drehen wir den Kalkspat um den einfallen-

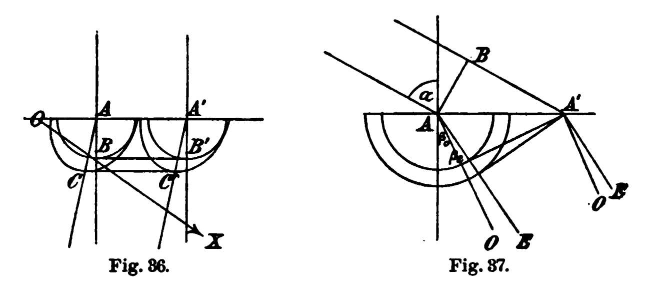


Fig. 36. Fig. 37.

den Strahl als Achse, so behält der ordentliche Strahl seine Lage bei, während der außerordentliche sich um jenen herumdreht. Der Brechungsexponent des ordentlichen Strahls hat einen ganz bestimmten Wert, jener des außerordentlichen ändert sich mit dem Winkel, welchen der einfallende Strahl mit der optischen Achse bildet. Man gibt jedoch in der Regel als Brechungsexponenten für den außerordentlichen Strahl seinen kleinsten Wert an. Dieser tritt ein, wenn die optische Achse in der brechenden Fläche selbst liegt und senkrecht zur Einfallsebene ist. Wir erhalten dann den ordentlichen und

außerordentlichen Strahl nach der Konstruktion Fig. 37, wo der kleinere Kreis der Kugelfläche angehört, während der größere der Äquator des Rotationsellipsoids ist.

## § 25. Elliptische und zirkulare Polarisation.

Wir nehmen an, ein polarisierter Lichtstrahl falle senkrecht auf eine planparallele Kalkspatplatte, deren optische Achse HH (Fig. 38) senkrecht zum Einfallslot liegt, während die Schwingungen in der Richtung PP vor sich gehen. HH versinnlicht also gleichzeitig die Lage des Hauptschnitts. Die Dicke der Platte sei $\Delta$; der Bewegungszustand beim Einfallspunkt sei gegeben durch

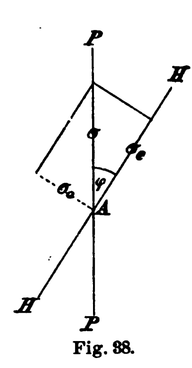


Fig. 38.

$$\sigma = a \sin \frac{2\pi t}{\tau}.$$

Dieser wird zerlegt in den ordentlichen und außerordentlichen Strahl. Ersterer ist beim Austritt aus der Platte

$$\sigma_o = a \sin\varphi \sin \frac{2\pi}{\tau}\left(t - \frac{\Delta}{o}\right),$$

letzterer

$$\sigma_e = a \cos\varphi \sin \frac{2\pi}{\tau}\left(t - \frac{\Delta}{e}\right),$$

wenn wir mit o und e die Lichtgeschwindigkeit des ordentlichen bezgl. außerordentlichen Strahls bezeichnen. Wir wollen

$$\frac{2\pi}{\tau}\left(t - \frac{\Delta}{o}\right) = \psi, \quad \frac{2\pi}{\tau}\left(\frac{\Delta}{o} - \frac{\Delta}{e}\right) = \vartheta$$

setzen, können sonach schreiben

$\sigma_o = \eta = \mathrm{a} \sin\varphi \sin\psi$, $\quad \sigma_e = \xi = \mathrm{a} \cos\varphi \sin(\psi + \vartheta)$;
führen wir noch

$$\mathrm{a} \cos\varphi = \mathrm{p}, \quad \mathrm{a} \sin\varphi = \mathrm{q}$$

ein, so erhalten wir schließlich

$$\xi = \mathrm{p} \sin(\psi + \vartheta), \quad \eta = \mathrm{q} \sin\psi .$$

Betrachten wir diese Größen als rechtwinkelige Koordinaten einer ebenen Kurve, so erhalten wir für $\vartheta = 2\pi$

$$\frac{\eta}{\xi} = \frac{\mathrm{q}}{\mathrm{p}} = \operatorname{tg}\varphi .$$

Das Licht der beiden Strahlen setzt sich also nach dem Austritt wieder zu einer geradlinigen Bewegung zusammen, welche dieselbe Schwingungsrichtung wie das einfallende Licht hat. Ist $\vartheta = \pi$, so wird

$$\xi = -\,\mathrm{p} \sin\psi, \quad \eta = \mathrm{q} \sin\psi,$$

$$\frac{\eta}{\xi} = -\frac{\mathrm{q}}{\mathrm{p}} = -\operatorname{tg}\varphi .$$

Es hat also die neue Schwingungsebene zur alten eine Drehung von $2\varphi$ erhalten. Es sei nun $\vartheta = \frac{\pi}{2}$, dann

$$\xi = \mathrm{p} \cos\psi, \quad \eta = \mathrm{q} \sin\psi,$$

$$\frac{\xi^2}{\mathrm{p}^2} + \frac{\eta^2}{\mathrm{q}^2} = 1 .$$

Wir haben somit als resultierenden Schwingungszustand eine Bewegung, die uns bis jetzt noch nicht vorgekommen ist. Die von uns erhaltene Kurve ist eine Ellipse, weshalb wir das Licht e l l i p t i s c h   p o l a r i s i e r t nennen. Ist die Schwingungsrichtung des einfallenden Lichts durch $\varphi = \frac{\pi}{4}$ gegeben, d. h. b i l d e t die Schwingungs-

richtung mit dem Hauptschnitt einen Winkel von 45°, so wird $p = q$ und wir haben die Gleichung eines Kreises. Licht von einem derartigen Bewegungszustand nennt man daher zirkular polarisiertes Licht. Ist $\vartheta = \frac{3\pi}{2}$, so erhalten wir dieselbe Ellipse bezgl. denselben Kreis, nur geht jetzt die Bewegung in entgegengesetzter Richtung vor sich.

Wir wissen, daß

$$\vartheta = \frac{2\pi}{\tau}\left(\frac{\Delta}{o} - \frac{\Delta}{e}\right)$$

ist. Für $\vartheta = \frac{\pi}{2}$ wird demnach

$$\frac{\Delta}{o} - \frac{\Delta}{e} = \frac{\tau}{4}.$$

Nun ist aber $\frac{\Delta}{o}$ die Zeit, welche der ordentliche Strahl braucht, um die Platte zu passieren, $\frac{\Delta}{e}$ die Durchgangszeit für den außerordentlichen Strahl. Wir erhalten somit elliptisch bezgl. zirkular polarisiertes Licht, wenn sich die Durchgangszeiten beider Strahlen um $\frac{1}{4}$-Schwingungsdauer voneinander unterscheiden. Glimmer läßt sich in dünne Blätter spalten, für welche diese Bedingung erfüllt ist. Man nennt ein solches Glimmerblättchen $\frac{1}{4}$-Undulationsglimmer.

### § 26. Polarisationsapparat — Turmalinzange — senkrecht einfallendes Licht.

Um zu erkennen, in welcher Weise polarisiertes Licht beim Durchgang durch Kristallplatten geändert wird, benutzt man einen sogenannten Polarisations-

apparat. Ein solcher besteht aus zwei Hauptteilen, dem Polarisator und dem Analysator. Ersterer verwandelt das natürliche Licht in geradlinig polarisiertes. Dieses Licht läßt man dann durch die zu untersuchende Kristallplatte und sodann durch den Analysator gehen, aus welchem ebenfalls linear polarisiertes Licht austritt. Der einfachste derartige Apparat ist die sogenannte Turmalinzange. Der Turmalin hat die Eigenschaft, nur Licht von bestimmter Schwingungsrichtung durchzulassen. Bringen wir daher zwischen zwei Turmalinplatten einen Kristall, so kann durch Verdrehung der Turmaline gegeneinander alles erzielt werden, was man von einem Polarisationsapparat verlangt.

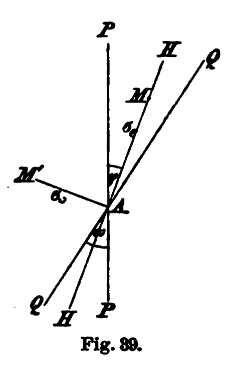


Fig. 39.

Es seien nun $\sigma_e = AM$ (Fig. 39) und $\sigma_0 = AM'$, die beiden Schwingungen nach dem Passieren der Kristallplatte. Die Strahlen gelangen sodann durch den Analysator, der sie nur Schwingungen in der Richtung QQ ausführen läßt. Es könnte dies z. B. ein Spiegel sein, auf welchem die Strahlen unter dem Polarisationswinkel auffallen.

Wir haben nun nach dem Früheren

$$\sigma_0 = a \sin\varphi \sin\psi\,, \quad \sigma_e = a \cos\varphi \sin(\psi + \vartheta)\,.$$

Vom ordentlichen Strahl entfällt sodann auf die Richtung QQ die Komponente $\sigma_0 \sin(\omega - \varphi)$, wenn $\omega - \varphi$ der Winkel zwischen dem Hauptschnitt der Kristallplatte und der Schwingungsebene des Analysators ist. Der außerordentliche Strahl liefert $\sigma_e \cos(\omega - \varphi)$, und

wir haben als resultierende Schwingung

$$\sigma' = \sigma_e \cos(\omega - \varphi) - \sigma_o \sin(\omega - \varphi)$$
$$= a \cos\varphi \cos(\omega - \varphi) \sin(\psi + \vartheta) - a \sin\varphi \sin(\omega - \varphi) \sin\psi .$$

Wir wollen hier die Glieder mit $\cos\psi$ bezgl. $\sin\psi$ als Faktoren herausheben, erhalten somit

$$\sigma' = [a \cos\varphi \cos(\omega - \varphi) \cos\vartheta - a \sin\varphi \sin(\omega - \varphi)] \sin\psi$$
$$+ a \cos\varphi \cos(\omega - \varphi) \sin\vartheta \cos\psi .$$

Wir haben also eine schwingende Bewegung von der Form

$$\sigma' = A \sin\psi + B \cos\psi .$$

Die Amplitude J dieser Bewegung ist gegeben durch

$$J^2 = A^2 + B^2 ,$$

woraus für unsern speziellen Fall folgt

$$J^2 = a^2 \cos^2\varphi \cos^2(\omega - \varphi) + a^2 \sin^2\varphi \sin^2(\omega - \varphi)$$
$$- 2 a^2 \sin\varphi \cos\varphi \sin(\omega - \varphi) \cos(\omega - \varphi) \cos\vartheta .$$

Fügen wir der zweiten Seite dieser Gleichung noch

$$- 2 a^2 \cos\varphi \sin\varphi \cos(\omega - \varphi) \sin(\omega - \varphi)$$
$$+ 2 a^2 \cos\varphi \sin\varphi \cos(\omega - \varphi) \sin(\omega - \varphi)$$

hinzu, so können wir leicht finden

$$(25) \quad J^2 = a^2 \cos^2\omega + a^2 \sin 2\varphi \sin(2\omega - 2\varphi) \sin^2\frac{\vartheta}{2} .$$

Wir setzen nun $\omega = 0$. Man nennt das die Parallelstellung, da die Schwingungen im Polarisator jenen im Analysator parallel sind. Wir haben dann

$$J_0^2 = a^2 - a^2 \sin^2 2\varphi \sin^2\frac{\vartheta}{2} .$$

Für $\omega = \frac{\pi}{2}$, die gekreuzte Stellung, erhalten wir hingegen

$$J^2_{\frac{\pi}{2}} = a^2 \sin^2 2\varphi \sin^2 \frac{\vartheta}{2}.$$

Es ist somit

$$J_0^2 + J^2_{\frac{\pi}{2}} = a^2.$$

Das heißt, die Erscheinungen der Parallelstellung und der gekreuzten sind einander komplementär. Verändern wir die Lage des Hauptschnitts, so wird für die Kreuzstellung

$$J^2 = 0,$$

wenn

$$\varphi = 0, \quad \frac{\pi}{2}, \quad \pi, \ldots$$

wird. In diesem Fall erhalten wir also ein dunkles Gesichtsfeld. Hat der Kristall die Eigenschaft, das Licht zirkular zu polarisieren, so geschieht dies für $\vartheta = \frac{\pi}{2}$ und $\varphi = \frac{\pi}{4}$. Dann wird

$$J^2 = a^2 \cos^2 \omega - a^2 \cos 2\omega \cdot \tfrac{1}{2} = \frac{a^2}{2} + \frac{a^2}{2} \cos 2\omega$$
$$- \frac{a^2}{2} \cos 2\omega = \frac{a^2}{2}.$$

Es ist hier die Intensität des Lichts von der Stellung des Polarisationsapparats ganz unabhängig.

## § 27. Schief einfallendes Licht.

Durch eine planparallele Platte AB (Fig. 40) gehe ein Lichtstrahl SCD und parallel dazu durch die Luft der Strahl S′C′D′. Der Strahl SCD erleidet dabei gegen S′C′D′ eine Verzögerung

$$Z = \frac{CD}{u} - \frac{C'D'}{v},$$

wenn u die Lichtgeschwindigkeit in der Platte, v jene in der Luft ist. Wir können diese Verzögerung auch so darstellen:

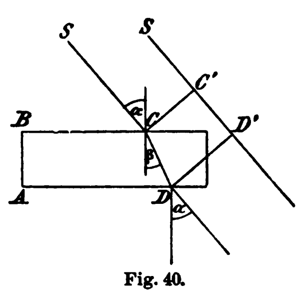



Fig. 40.

$$Z = \frac{CD}{u} - \frac{\overline{CD} \cdot \cos(\alpha - \beta)}{v}$$

$$= \frac{AB}{u \cos\beta} - \frac{\overline{AB} \cdot \cos(\alpha - \beta)}{v \cos\beta}$$

$$= \frac{AB}{v}\left[\frac{v}{u \cos\beta} - \frac{\cos(\alpha - \beta)}{\cos\beta}\right]$$

$$= \frac{AB}{v}\left(\frac{\sin\alpha}{\sin\beta \cos\beta} - \cos\alpha - \frac{\sin\alpha \sin\beta}{\cos\beta}\right)$$

$$= \frac{AB}{v}\left[\frac{\sin\alpha\,(1 - \sin^2\beta)}{\sin\beta \cos\beta} - \cos\alpha\right]$$

$$= \frac{AB}{v}\left(\frac{\sin\alpha \cos\beta}{\sin\beta} - \cos\alpha\right)$$

$$= \overline{AB}\left(\frac{\cos\beta}{u} - \frac{\cos\alpha}{v}\right).$$

Wenden wir diese Formel auf eine doppeltbrechende Platte an, so erhalten wir für die Verzögerung des ordentlichen Strahls

$$Z_o = \overline{AB}\left(\frac{\cos\beta}{o} - \frac{\cos\alpha}{v}\right),$$

für den außerordentlichen Strahl

$$Z_e = \overline{AB}\left(\frac{\cos\beta'}{u} - \frac{\cos\alpha}{v}\right),$$

mithin für den Zeitunterschied beider Strahlen

$$Z_e - Z_o = \overline{AB}\left(\frac{\cos\beta'}{u} - \frac{\cos\beta}{o}\right).$$

Wir haben hier die Geschwindigkeit des ordentlichen Strahls o, die des außerordentlichen u genannt. Letztere ist gegeben, sobald der Winkel des Strahls mit der optischen Achse bekannt ist. Es läßt sich nun $\cos\beta$ und $\cos\beta'$ als Funktion von $\alpha$, sowie den Geschwindigkeiten v, o und u darstellen, wobei u wieder eine Funktion von $\alpha$, e, o und v ist, so daß $Z_e - Z_o$ für eine bestimmte Kristallplatte lediglich eine Funktion des Einfallswinkels ist, da ja die Geschwindigkeiten v, o und e, d. i. der größte mögliche Wert von u, konstante Größen sind. Somit ist auch $\vartheta = \frac{2\pi}{\tau}(Z_e - Z_o)$ eine Funktion von $\alpha$. Führen wir daher jetzt unser $\vartheta$ in die Gleichung (25) ein, so werden wir mit wechselndem $\alpha$ auch wechselnde Intensitäten des Lichts erhalten. Blickt also das Auge durch einen Polarisationsapparat, in welchem sich eine Kalkspatplatte befindet, so wird es eine Sehlinie geben, welche den Kalkspat senkrecht zu seinen Begrenzungsflächen durchsetzt. In dieser Richtung sehen wir dann die im vorhergehenden Paragraphen behandel-

ten Erscheinungen. In jedem konzentrischen Kreis um diese Sehlinie herum liegen Sehlinien, welche unter demselben Winkel die Platte treffen. Die Interferenzerscheinungen der Platte, welche von schief auffallenden Strahlen herrühren, werden daher kreisförmig angeordnet sein. Wir sehen somit eine Reihe konzentrischer Kreise, welche abwechselnd hell und dunkel sind, je nachdem wir $\vartheta = \pi, 3\pi, 5\pi \ldots$ oder $\vartheta = 0, 2\pi, 4\pi \ldots$ haben. Diese Kreise werden infolge der durch den Winkel $\varphi$ (§ 26) bedingten Interferenzen von einem rechtwinkligen Kreuz radial geschnitten, welches je nach der Wahl der Winkel $\omega$ und $\varphi$ hell oder dunkel sein kann.

## § 28. **Totale Reflexion.**

Für die Brechung des Lichts fanden wir die Gleichung

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \frac{c}{c'},$$

welche immer einen Sinn hat, falls $c > c'$ ist. Geht jedoch der Strahl von einem optisch dichteren in ein dünneres Medium, d. h. ist $c < c'$, so gelangen wir schließlich zu einem Einfallswinkel $\alpha$, für welchen $\sin\beta = 1$, $\beta = \frac{\pi}{2}$ wird. Der Strahl tritt dann nicht mehr in das zweite Medium ein, sondern er wird für alle Winkel, welche größer als dieser Grenzwinkel sind, vollständig reflektiert, weshalb wir diesen Vorgang „totale Reflexion" und den Grenzwinkel $\alpha$, für welchen $\beta = \frac{\pi}{2}$ wird, den Grenzwinkel der totalen Reflexion nennen.

Wir fanden für die Größe der Amplitude des

reflektierten Lichts, welches senkrecht zur Einfallsebene schwingt, nach Gleichung (19)

$$\frac{a'}{a} = -\frac{\sin(\alpha - \beta)}{\sin(\alpha + \beta)} = -\frac{\sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta}{\sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta}.$$

Wir wollen die Substitution

$$\cos\beta = \sqrt{1 - \sin^2\beta} = i\sqrt{\sin^2\beta - 1}$$

einführen. Dann haben wir

$$\frac{a'}{a} = \frac{\cos\alpha\sin\beta - \sin\alpha \cdot i\sqrt{\sin^2\beta - 1}}{\cos\alpha\sin\beta + \sin\alpha \cdot i\sqrt{\sin^2\beta - 1}} = \frac{f - gi}{f + gi} = h + ki.$$

Wir erhalten somit bei der totalen Reflexion für die Amplitude der reflektierten Welle eine komplexe Zahl. Dies deutet nun Fresnel in sehr sonderbarer Weise. Er sagt: Multiplizieren wir den Schwingungszustand mit — 1, so bedeutet das eine Verzögerung um eine halbe Schwingungsdauer. Ebenso können wir die Multiplikation mit $\sqrt{-1}$ als eine Verzögerung um eine viertel Schwingungsdauer auffassen. Es wird dann der Schwingungszustand nach der Reflexion

$$\sigma' = a'\sin\frac{2\pi t}{\tau} = a(h + ki)\sin\frac{2\pi t}{\tau}$$

$$= a\left(h\sin\frac{2\pi t}{\tau} - k\cos\frac{2\pi t}{\tau}\right) = a\sin\frac{2\pi}{\tau}(t - \vartheta),$$

wenn wir

$$h = \cos\frac{2\pi\vartheta}{\tau}, \quad k = \sin\frac{2\pi\vartheta}{\tau}$$

setzen. Es folgt somit, daß

$$a' = a$$

ist, da ja jetzt die neue Amplitude durch

$$a'^2 = a^2 (h^2 + k^2)$$

bestimmt ist.

Für die Amplitude des reflektierten Lichts, welches in der Einfallsebene schwingt, haben wir nach Gleichung (23)

$$\begin{aligned}\frac{a'}{a} &= \frac{\operatorname{tg}(\alpha-\beta)}{\operatorname{tg}(\alpha+\beta)} = -\frac{\sin(\alpha-\beta)}{\sin(\alpha+\beta)} \cdot -\frac{\cos(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha-\beta)} \\ &= (h+ki) \cdot -\frac{\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta} \\ &= (h+ki)\frac{\sin\alpha\sin\beta - \cos\alpha \cdot i\sqrt{\sin^2\beta - 1}}{\sin\alpha\sin\beta + \cos\alpha \cdot i\sqrt{\sin^2\beta - 1}} \qquad (26) \\ &= (h+ki)\frac{1-mi}{1+mi} = (h+ki)(r+si)\,.\end{aligned}$$

Die Phasendifferenz der Lichtkomponenten senkrecht und parallel zur Einfallsebene ist daher durch $r + si$ bestimmt. Nennen wir sie $\delta$, so wird

$$r = \cos\frac{2\pi\delta}{\tau}\,, \quad s = \sin\frac{2\pi\delta}{\tau}\,.$$

Auch hier folgt, wie oben,

$$a' = a\,.$$

Es entsprechen also unsere Formeln insofern tatsächlich der Wirklichkeit, als aus ihnen die Totalreflexion folgt; doch werden wir sofort noch weitere Konsequenzen kennen lernen, die alle durch das Experiment erhärtet sind.

### 29. Elliptische Polarisation durch totale Reflexion.

Wir wollen annehmen, daß die Schwingungsebene des einfallenden Lichtes

$$\sigma = a\sin\frac{2\pi t}{\tau}$$

mit der Einfallsebene den Winkel $\varphi$ bildet. Dann sind die beiden Komponenten senkrecht und parallel zur Einfallsebene

$$\xi = \sigma \sin\varphi\,, \quad \eta = \sigma \cos\varphi\,,$$

folglich, wie wir im vorhergehenden Paragraphen erfahren haben, nach der Reflexion

$$\xi' = a \sin\varphi \sin\frac{2\pi}{\tau}(t - \vartheta)\,,$$

$$\eta' = a \cos\varphi \sin\frac{2\pi}{\tau}(t - \vartheta - \delta)\,.$$

Wird $\delta = \frac{\tau}{4}$, so setzen sich die beiden Komponenten zu einer Schwingung zusammen, welcher die Gleichung

$$\frac{\xi'^2}{a^2 \sin^2\varphi} + \frac{\eta'^2}{a^2 \cos^2\varphi} = 1$$

entspricht. Wir haben somit elliptisch polarisiertes Licht. Dies wird zu zirkular polarisiertem, wenn $\varphi = \frac{\pi}{4}$ ist.

Wird nun $\delta = \frac{\tau}{4}$, so wird $r = \cos\frac{2\pi\delta}{\tau} = 0$. Aus der Gleichung

$$\frac{1 - m i}{1 + m i} = r + s i$$

finden wir

$$r = \frac{1^2 - m^2}{1^2 + m^2}\,.$$

Soll demnach $r = o$ werden, so muß $1 = m$ sein. Wir finden daher nach Gleichung (26)

6*

$$\sin\alpha \sin\beta = \cos\alpha \sqrt{\sin^2\beta - 1}$$

oder

$$\sin^2\alpha \sin^2\beta = \cos^2\alpha (\sin^2\beta - 1) .$$

Hier können wir $\sin\beta$ durch $\alpha$ und den Brechungsexponenten n aus der Gleichung

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \frac{1}{n}$$

ersetzen, wenn wir den Brechungsexponenten beim Gang des Lichts aus dem dünneren ins dichtere Medium n nennen.

Es läßt sich nun leicht die Gleichung

$$\sin^4\alpha - \frac{n^2 + 1}{2 n^2} \sin^2\alpha = - \frac{1}{2 n^2}$$

und somit auch

$$\sin^2\alpha = \frac{n^2 + 1}{4 n^2} \pm \sqrt{\frac{(n^2 + 1)^2}{16 n^4} - \frac{1}{2 n^2}}$$

herleiten. Soll also $\alpha$ einen reellen Wert haben, so muß $\frac{(n^2 + 1)^2}{16 n^4} > \frac{1}{2 n^2}$ sein. Daraus folgt aber ein Brechungsexponent, welcher so groß ist, daß nur beim Diamant durch eine einmalige Totalreflexion elliptisch polarisiertes Licht zu erhalten wäre. Wir können aber die Phasendifferenzen summieren. Lassen wir daher einen Lichtstrahl, anstatt einmal, zweimal total reflektieren, so daß jedesmal eine Phasendifferenz $\delta = \frac{\tau}{8}$ entsteht, dann erhalten wir ebenfalls elliptisch polarisiertes Licht. Dies geschieht im Fresnelschen Parallelepiped ABCD (Fig. 41), dessen Winkel $\alpha$ so

geschliffen sind, daß sie einer Phasendifferenz $\delta = \frac{\tau}{8}$ entsprechen. Ein bei G senkrecht eintretender geradlinig polarisierter Lichtstrahl wird daher bei H in der Richtung HP als elliptisch polarisierter austreten. Geht die ursprüngliche Schwingung unter einem Winkel von 45° zur Einfallsebene GEF vor sich, so erhalten wir einen zirkular polarisierten Strahl.

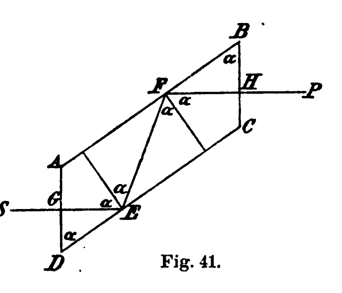


Fig. 41.

Es eignet sich ein derartiges Parallelepiped viel besser zur Erzeugung zirkular polarisierten Lichts, als der sogenannte $\frac{1}{4}$-Undulationsglimmer. Da in letzterem der Gangunterschied des ordentlichen und außerordentlichen Strahls $\frac{1}{4}$-Schwingungsdauer ausmachen soll, so läßt sich die Zirkularpolarisation nur für eine bestimmte Farbe genau herstellen, indem ja die Wellenlänge mit der Farbe sich erheblich verändert, während die Änderung des Brechungsexponenten eine verhältnismäßig geringe ist.

---

# Die Lehre von der Wärme.

## Wärmeleitung.

### § 30. Wärmemenge — Temperatur — spezifische Wärme — Wärmekapazität.

Wie wir die Schall- und Lichterscheinungen auf bloße Bewegungserscheinungen zurückgeführt haben, so

tun wir es auch mit den Erscheinungen der Wärme. Wir fassen die Wärme als Bewegung der kleinsten Teilchen eines Körpers, als Molekularbewegung auf. Für die Bahnen der Molekeln gibt es keine bevorzugte Richtung, sie sind nach allen Richtungen gleichförmig verteilt. Der Schwerpunkt des Körpers bleibt also in Ruhe, und da die Bewegung der einzelnen Molekeln sinnlich nicht wahrnehmbar ist, so ist für die Sinnesorgane auch der ganze Körper in Ruhe. Die Gesamtenergie der Molekeln nennen wir seine Wärmemenge. Bringen wir zwei Körper zur Berührung, so wird ein Energieaustausch stattfinden. Von jenem Körper, welcher Energie an den andern abgibt, sagen wir, er besitze die höhere Temperatur. Nach willkürlichem Maß messen wir die Temperatur mit dem Thermometer und nennen die Maßeinheit einen Temperaturgrad. Die Wärmemenge, welche die Gewichtseinheit eines Körpers um einen Grad erhöht, ist dessen spezifische Wärme c. Diese kann sich mit der Temperatur ändern, wir werden sie daher besser durch

$$c = \frac{dQ}{du}$$

definieren, wenn wir unter Q die Wärmemenge und unter u die Temperatur verstehen. Die Wärmemenge, welche wir demnach einem Körper zuführen, wird gleich dem Produkt aus seinem Gewicht, spezifischer Wärme und Temperaturerhöhung sein. Das Produkt aus der spezifischen Wärme und dem Gewicht ist die Wärmekapazität des Körpers.

Die Erfahrung lehrt, daß verschieden temperierte Körper, sich selbst überlassen, ihre Temperaturen aus-

gleichen. Dies geschieht entweder durch Leitung oder durch Strahlung der Wärme. Im ersteren Fall müssen die Körper einander berühren, und es gibt direkt der eine Energie an den andern ab. Es ist dies die Regel, wenn verschiedene Punkte ein und desselben Körpers verschiedene Temperaturen besitzen. Im zweiten Fall ist der Träger der Wärme der hypothetische Lichtäther, und es lehrten die Untersuchungen, daß Licht- und Wärmestrahlen sich physikalisch voneinander gar nicht unterscheiden.

Die im folgenden gegebene Theorie der Wärmeleitung wurde von Fourier begründet und ausgearbeitet.

### § 31. Gleichung der Wärmeleitung in einem Stab.

Wir halten das eine Ende eines dünnen Stabs beständig auf der Temperatur a, das andere auf der niedrigeren Temperatur b. Es strömt dann durch den Stab Wärme von a nach b. Je größer der Temperaturunterschied $a - b$ ist, desto mehr Wärme wird in der Zeiteinheit durch einen Querschnitt des Stabs fließen. Machen wir die Voraussetzung, der Stab gebe nach außen keine Wärme ab, was freilich in Wirklichkeit nur angenähert erreicht werden kann, so muß durch jeden Querschnitt des Stabs in derselben Zeit dieselbe Wärmemenge W gehen. Wir wollen sie daher proportional der Zeit und dem Temperaturunterschied setzen. Sie wird ferner noch proportional dem Querschnitt des Stabs q und schließlich von der Länge l des Stabs abhängig sein, so daß wir für die durch den Querschnitt gehende Wärmemenge

$$W = q\,t\,(a - b)\,f(l)$$

erhalten.

Teilen wir unsern Stab in gleiche Teile von der

Länge $\lambda$ und sei in der Entfernung $\lambda$ von a die Temperatur $a_1$, in der Entfernung $2\lambda$ $a_2$ usw., so muß die Gleichung

$$W = qt(a - a_1)f(\lambda) = qt(a_1 - a_2)f(\lambda) = \ldots$$

gelten, woraus folgt

$$a - a_1 = a_1 - a_2 = \ldots$$

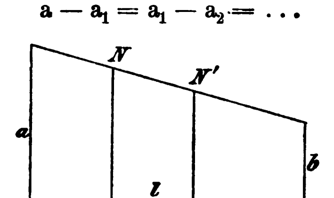



Fig. 42.

Es fällt also von a nach b die Temperatur linear ab. Wir können daher ganz allgemein schreiben

$$W = qt(MN - M'N')f(MM')$$

(Fig. 42). Da aber

$$\frac{MN - M'N'}{MM'} = \frac{a - b}{l} = G$$

ist, so wird

$$W = qtG \cdot \overline{MM'}f(\overline{MM'}) = qtGyf(y),$$

wenn wir $MM' = y$ einführen. Wir können nun $yf(y) = k$, also

$$f(y) = \frac{k}{y}$$

setzen, wonach

$$W = qtk\frac{a - b}{l}$$

wird. Die Konstante k nennen wir die Wärmeleitungs-

fähigkeit; es ist die Wärmemenge, welche in der Zeiteinheit durch die Querschnittseinheit beim Temperaturgefälle Eins geht, wobei wir unter dem Temperaturgefälle die Größe $\frac{a-b}{l}$ verstehen.

Das lineare Temperaturgefälle in unserm Stab ist nur für den Fall eines stationären Zustands vorhanden. In allen andern Fällen können wir daher unsere Gleichung nur für ein sehr kurzes Stück $dx$ des Stabs benützen, für welches wir das Gefälle als linear annehmen. Auf der Strecke $dx$ soll die Temperatur um $du$ fallen. Anstatt $\frac{a-b}{l}$ haben wir demnach $-\frac{du}{dx}$ zu setzen. Das negative Vorzeichen rührt davon her, daß die Wärme immer entgegen der Richtung der Temperaturzunahme fließt. Das Temperaturgefälle $-\frac{du}{dx}$ wird ferner nur für eine kurze Zeit $\tau$ als konstant anzusehen sein. Während dieser Zeit fließt dann durch den Querschnitt des Stabs die Wärmemenge

$$W = -q\tau k\frac{du}{dx}. \tag{27}$$

Ein sehr kurzes Stabstück von der Länge $\xi$ sei durch die Querschnitte M und M′ begrenzt. Es strömt dann in der Zeit $\tau$ durch den Querschnitt M die Wärmemenge, welche durch Gleichung (27) gefunden wird, ein, durch M′ die Menge

$$W' = -q\tau k\left(\frac{du}{dx}\right)'$$

aus. Es bleibt daher in unserm Stabelement die Wärme $W - W'$ zurück und erhöht die Temperatur um $\delta$. Das

Volumen des Stabelements ist $q\xi$, das spezifische Gewicht sei s, die spezifische Wärme c. Dann ist sein Gewicht $q\xi s$ und seine Wärmekapazität $q\xi s c$. Es besteht somit die Gleichung

$$W - W' = q\xi s c \delta .$$

Die Temperaturerhöhung per Zeiteinheit können wir $\frac{\partial u}{\partial t}$ schreiben, daher für die Zeit $\tau$

$$\delta = \frac{\partial u}{\partial t}\tau ,$$

mithin

$$W - W' = q\xi s c \frac{\partial u}{\partial t}\tau .$$

Für einen Zeitpunkt oder für eine unendlich kleine Zeit $\tau$ können wir die Wärmemenge W als eine Funktion von x ansehen, wenn wir mit x die Entfernung eines Punkts des Stabs vom Anfangspunkt bezeichnen. Dann ist

$$W' = W + \frac{\partial W}{\partial x}\xi ,$$

folglich nach Gleichung (27)

$$W - W' = -\frac{\partial W}{\partial x}\xi = q\tau k \xi \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} .$$

Wir erhalten somit die Gleichung

$$q\xi s c \frac{\partial u}{\partial t}\tau = q\tau k \xi \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

oder

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{k}{sc} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} .$$

Wir lassen jetzt die Bedingung, daß der Stab nach außen keine Wärme abgibt, fallen und nehmen an, daß

die abgegebene Wärme der Temperaturdifferenz zwischen Stab und Umgebung und der Oberfläche proportional sei. Ist p der Umfang, so ist $p\xi$ die Oberfläche des Stabelements und $hp\xi(u-a)\tau$ die nach außen abgegebene Wärme, wenn wir a die Temperatur der Umgebung nennen. Da es nun ganz gleichgültig ist, wo wir den Nullpunkt der Temperaturskala anbringen, so können wir von Fall zu Fall

$$a = 0$$

annehmen. Es bleibt uns dann für die nach außen abgegebene Wärmemenge der Ausdruck $hp\xi u\tau$. Die im Stabelement verbleibende Wärme ist daher

$$W - W' - hp\xi u\tau,$$

was uns die Gleichung

$$q\xi sc\frac{\partial u}{\partial t}\tau = q\tau k\xi\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - hp\xi u\tau$$

ergibt, welche sich reduziert auf

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{k}{sc}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{hp}{qsc}u$$

oder

$$\frac{\partial u}{\partial t} = m\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - nu. \tag{28}$$

Die Größe $m = \frac{k}{sc}$ nennt man die Temperaturleitungsfähigkeit oder auch das thermometrische Leitungsvermögen, h die äußere Wärmeleitungsfähigkeit.

Es darf also das Temperaturleitungsvermögen nicht mit dem Wärmeleitungsvermögen verwechselt werden. Während z. B. die Wärmeleitungsfähigkeit der Gase gegenüber jener der Metalle sehr klein ist, haben sie

doch ziemlich dasselbe Temperaturleitungsvermögen. Das heißt, es gleichen sich verschiedene Temperaturen in Gasen ebenso rasch aus wie in Metallen.

### § 32. **Stationärer Zustand.**

Bleibt jeder Punkt unseres Stabs auf konstanter Temperatur, so nennen wir diesen Zustand stationär. Es ist also dann

$$\frac{\partial u}{\partial t} = 0\,,$$

und Gleichung (28) wird

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{n}{m} u = 0\,.$$

Eine Lösung dafür ist

$$u = e^{\beta x}\,.$$

Danach wird unsere Gleichung

$$\beta^2 e^{\beta x} - \frac{n}{m} e^{\beta x} = 0\,,$$

folglich

$$\beta^2 = \frac{n}{m}\,, \quad \beta = \pm \sqrt{\frac{n}{m}}\,.$$

Wir erhalten also zwei Werte für $\beta$, welche wir zusammenfassen können in

$$u = A e^{-x\sqrt{\frac{n}{m}}} + B e^{x\sqrt{\frac{n}{m}}}\,.$$

Unser Stab sei nun sehr lang. Die Temperatur soll aber für ein unendlich großes x nicht unendlich werden. Dann ist $B = 0$ zu setzen, und es bleibt

$$u = A e^{-x\sqrt{\frac{n}{m}}}\,.$$

Für $x = 0$ sei $u = u_0$. Folglich wird $A = u_0$. Haben

wir zwei Stäbe mit derselben Anfangstemperatur, so ist für den einen

$$u = u_0 e^{-x\sqrt{\frac{n}{m}}},$$

für den andern

$$u' = u_0 e^{-x'\sqrt{\frac{n'}{m'}}}$$

Für zwei Punkte gleicher Temperatur muß somit

$$x\sqrt{\frac{n}{m}} = x'\sqrt{\frac{n'}{m'}}$$

sein. Es ist nun

$$\frac{n}{m} = \frac{h p}{q k}, \quad \frac{n'}{m'} = \frac{h' p'}{q' k'}.$$

Geben wir daher den Stäben kongruente Form und gleiche Oberflächenbeschaffenheit, so ist

$$\frac{h p}{q} = \frac{h' p'}{q'},$$

und wir erhalten

$$\frac{k'}{k} = \frac{x'^2}{x^2},$$

was uns die Möglichkeit liefert, die Wärmeleitungsfähigkeiten von Stäben verschiedenen Materials zu vergleichen.

## § 33. Wärmeleitung in einem Ring.

Setzen wir in Gleichung (28)

$$u = y e^{-nt},$$

so nimmt sie, wie leicht zu finden, die Form

$$\frac{\partial y}{\partial t} = m \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$$

an. Das ist aber die Form der Wärmeleitungsgleichung ohne Wärmeabgabe nach außen, welche wir schreiben können

$$(29) \qquad \frac{\partial u}{\partial t} = m \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

Es wird demnach in vielen Fällen genügen, die Lösung für die Gleichung (29) zu kennen, weil diese, mit $e^{-nt}$ multipliziert, sodann die Lösung für (28) ergibt. Eine Lösung der Gleichung (29) ist

$$(30) \qquad u = e^{\alpha t + \beta x}.$$

Dieser Wert, in die Gleichung (29) eingesetzt, gibt

$$\alpha = m \beta^2.$$

Soll die Temperatur mit der Zeit nicht ins Unendliche wachsen, so muß $\alpha$ negativ sein. Wir wollen $\alpha = -\gamma$ schreiben, wonach wir

$$\beta \sqrt{m} = \pm i \sqrt{\gamma}$$

erhalten, was sich in das partikuläre Integral

$$u = e^{-\gamma t}\left(A \cos x \sqrt{\frac{\gamma}{m}} + B \sin x \sqrt{\frac{\gamma}{m}}\right)$$

zusammenfassen läßt. (Bd. I § 10.)

Wenden wir diese Formel auf einen Stab an, welcher zu einem Ring zusammengebogen ist, so daß sich Anfangs- und Endpunkt berühren, und legen wir in eine beliebige Stelle des Rings den Anfangspunkt der Abszissen, so muß in den Punkten $x$, $x + l$, $x + 2l, \ldots$ die Temperatur ein und dieselbe Größe haben, wenn $l$ der Umfang des Rings ist. Daraus folgt, daß

$$l \sqrt{\frac{\gamma}{m}} = 2\pi, \quad 4\pi, \quad 6\pi \ldots$$

sein muß, wonach

$$\gamma = \frac{4\pi^2 m}{l^2}, \quad \frac{16\pi^2 m}{l^2}, \quad \frac{36\pi^2 m}{l^2}, \ldots$$

wird. Wir haben somit als allgemeine Lösung

$$u = \sum_{k=0}^{k=\infty} e^{-\frac{4k^2\pi^2 m t}{l^2}} \left(A_k \cos\frac{2k\pi x}{l} + B_k \sin\frac{2k\pi x}{l}\right).$$

Die Konstanten A und B lassen sich berechnen, sobald für $t = 0$ die Temperatur durch $u = f(x)$ gegeben ist (Bd. I § 85). Die höheren Glieder unserer Summe nehmen mit wachsender Zeit sehr rasch ab. In der Praxis genügt es daher, sich auf

$$u = A_0 + e^{-\frac{4\pi^2 m t}{l^2}} \left(A_1 \cos\frac{2\pi x}{l} + B_1 \sin\frac{2\pi x}{l}\right)$$

zu beschränken. Es ist dies die Temperatur der Abszisse x. Gegenüber liegt der Punkt $x + \frac{l}{2}$ mit der Temperatur

$$u' = A_0 + e^{-\frac{4\pi^2 m t}{l^2}} \left(- A_1 \cos\frac{2\pi x}{l} - B_1 \sin\frac{2\pi x}{l}\right).$$

Die Summe beider liefert

$$u + u' = 2 A_0,$$

die Differenz

$$u - u' = 2 e^{-\frac{4\pi^2 m t}{l^2}} \left(A_1 \cos\frac{2\pi x}{l} + B_1 \sin\frac{2\pi x}{l}\right).$$

Es nimmt also die Differenz der Temperaturen zweier gegenüberliegender Punkte geometrisch mit der Zeit ab, woraus wir die Größe des Exponenten, somit auch die Temperatur- und Wärmeleitungsfähigkeit bestimmen können.

## § 34. Die tägliche und jährliche Temperaturschwankung unter der Erdoberfläche.

In der Lösung der Gleichung (29), welche durch Gleichung (30) gegeben ist, ist eine der beiden Konstanten $\alpha$ und $\beta$ vollständig willkürlich. Wir wollen deshalb $\alpha$ imaginär, also $\alpha = ai$ wählen. Wir haben dann

$$\beta = \pm\sqrt{\frac{ai}{m}},$$

ferner

$$\sqrt{ai} = \sqrt{\frac{a}{2}} + i\sqrt{\frac{a}{2}}$$

und

$$u = Ae^{ait + \frac{x}{\sqrt{m}}\left(\sqrt{\frac{a}{2}} + i\sqrt{\frac{a}{2}}\right)} + Be^{ait - \frac{x}{\sqrt{m}}\left(\sqrt{\frac{a}{2}} + i\sqrt{\frac{a}{2}}\right)}$$
$$= Ae^{x\sqrt{\frac{a}{2m}} + i\left(at + x\sqrt{\frac{a}{2m}}\right)} + Be^{-x\sqrt{\frac{a}{2m}} + i\left(at - x\sqrt{\frac{a}{2m}}\right)}.$$

Es läßt sich also u als periodische Funktion bei richtiger Wahl der Anfangszeit in folgender Weise darstellen:

$$u = Ce^{-x\sqrt{\frac{a}{2m}}}\sin\left(at - x\sqrt{\frac{a}{2m}}\right).$$

Für den Anfangspunkt $x = 0$ erhalten wir somit

$$u_0 = C\sin at.$$

Unsere Lösung gilt also für einen Stab, der nach außen keine Wärme abgibt und an dessen Anfangspunkt die Temperaturänderung eine harmonische Schwingung darstellt.

Denken wir uns ein Prisma, welches von der Erdoberfläche senkrecht in die Tiefe geht, so haben wir den Fall verwirklicht, daß nach außen keine Wärme abgegeben wird, da wegen der gleichen Verteilung der

Temperatur in einer horizontalen Ebene keine Wärmebewegung stattfindet. Die tägliche und jährliche Temperaturschwankung an der Erdoberfläche können wir in erster Annäherung als eine harmonische auffassen, können daher unsere Lösung auf die Temperaturänderung unter der Erdoberfläche beziehen. Wir finden in jeder Tiefe eine periodische Temperaturänderung, jedoch wird die Amplitude mit wachsender Tiefe immer kleiner, so daß wir etwa 28 m tief unter der Erdoberfläche die Temperaturschwankung überhaupt nicht mehr wahrnehmen, sondern jahraus jahrein eine konstante Temperatur, nämlich die mittlere Jahrestemperatur haben. Hat zu einer bestimmten Zeit t die Temperatur an der Erdoberfläche den Wert Null, so muß $a t = n \pi$ sein. In der Tiefe x wird diese Temperatur erst nach der Zeit $\delta$ eintreten, welche sich daraus bestimmt, daß dann $a(t + \delta) - x\sqrt{\frac{a}{2m}} = n\pi$ ist. Wir finden somit

$$a\delta = x\sqrt{\frac{a}{2m}} \qquad \text{oder} \qquad \frac{x}{\delta} = \sqrt{2ma}\,.$$

Das können wir die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Wärmewelle nennen. Nennen wir analog die Schwingungsdauer $\tau$, so haben wir $a = \frac{2\pi}{\tau}$, folglich

$$u = C e^{-x\sqrt{\frac{\pi}{m\tau}}} \sin\left(\frac{2\pi t}{\tau} - x\sqrt{\frac{\pi}{m\tau}}\right). \tag{31}$$

$$\frac{x}{\delta} = \sqrt{\frac{4m\pi}{\tau}}\,.$$

Es ist also die Fortpflanzungsgeschwindigkeit eine Funktion der Schwingungsdauer, und zwar wird sie um

so größer, je kleiner die Schwingungsdauer ist. Es pflanzen sich deshalb die täglichen Änderungen viel rascher in die Tiefe fort, als die jährlichen. Dafür nimmt aber die Amplitude der letzteren mit der Tiefe viel langsamer ab.

Die Gleichung (31) gibt uns die Mittel an die Hand, nach zwei Methoden die Wärmeleitungsfähigkeit der Erde zu bestimmen, einmal aus der Abnahme der Amplitude mit der Tiefe, das zweite Mal aus der Verzögerung des Maximums bezgl. des Minimums der Temperatur. In der Tiefe $x'$ ist die Schwankung der Temperatur

$$\delta' = 2\,C\,e^{-x'\sqrt{\frac{\pi}{m\tau}}},$$

in der Tiefe $x''$

$$\delta'' = 2\,C\,e^{-x''\sqrt{\frac{\pi}{m\tau}}},$$

folglich

$$\frac{\delta'}{\delta''} = e^{(x''-x')\sqrt{\frac{\pi}{m\tau}}},$$

woraus sich m bestimmen läßt.

Das Maximum der Temperatur haben wir in $x'$ zur Zeit $t'$, wenn

$$\frac{2\pi t'}{\tau} - x'\sqrt{\frac{\pi}{m\tau}} = \frac{\pi}{2},$$

desgl. in $x''$ nach der Zeit $t''$ für

$$\frac{2\pi t''}{\tau} - x''\sqrt{\frac{\pi}{m\tau}} = \frac{\pi}{2},$$

woraus sich ergibt

$$\frac{2\pi}{\tau}(t'' - t') = (x'' - x')\sqrt{\frac{\pi}{m\tau}}.$$

Dieselbe Formel erhalten wir für die Wanderung des Minimums, und wiederum ist es leicht, aus dieser Gleichung die Temperaturleitungsfähigkeit m und somit auch die Wärmeleitungsfähigkeit der Erde zu finden.

### § 35. Gleichung der Wärmeleitung in einem isotropen Körper — Analogie zwischen Wärme- und Flüssigkeitsströmung.

Denken wir uns aus einem isotropen Körper ein Volumelement $\xi \eta \zeta$ herausgeschnitten, so können wir für die drei Richtungen parallel zu den Koordinatenachsen dieselbe Überlegung machen, welche wir über die Wärmeströmung nach einer Richtung (§ 31) anstellten. Der Unterschied ist dann nur der, daß dem Volumelement nicht nur von einer Seite, sondern von drei Wärme zu- und gleicherweise abgeführt wird. Die Gleichung (29) erweitert sich daher auf

$$\frac{\partial u}{\partial t} = m \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right). \tag{32}$$

Für den stationären Zustand wird sie

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0 .$$

Dieselbe Gleichung fanden wir (Bd. I § 62) für die stationäre Strömung einer Flüssigkeit mit dem Geschwindigkeitspotential u. Wir können daher alle speziellen Fälle stationärer Wärmeströmung in einem isotropen Körper, der nach außen keine Wärme abgibt, auf die stationäre Bewegung einer idealen Flüssigkeit und umgekehrt übertragen, wenn wir Temperatur und Geschwindigkeitspotential, Temperaturgefälle

und Strömungsgeschwindigkeit miteinander vertauschen.

## § 36. Gleichung der Wärmeleitung in einer Kugel.

Wenden wir die Gleichung (32) auf eine Kugel an, in welcher die Wärmeströmung nur radial vor sich gehen soll, so muß in jeder konzentrischen Kugelschale die Temperatur konstant sein. Verlegen wir den Ursprung des Koordinatensystems in die Mitte der Kugel, so wird $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$ die Gleichung einer konzentrischen Kugelfläche, ferner

$$\frac{\partial^2 u}{dx^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{r}\frac{\partial^2 (ru)}{\partial r^2}.$$

(Bd. I § 67.) Wir können daher Gleichung (32) schreiben

$$\frac{\partial (ru)}{\partial t} = m\frac{\partial^2 (ru)}{\partial r^2}, \tag{33}$$

da ja bei der partiellen Differentiation von $r u$ nach $t$ $r$ als konstant anzusehen ist. Wir erhalten also für die Kugel dieselbe Gleichung der Wärmeleitung wie für den Stab, der nach außen keine Wärme abgibt, wenn wir $u$ durch $r u$ und $x$ durch $r$ ersetzen. Es tritt hier dieselbe Analogie auf wie für die Fortpflanzung einer ebenen und einer Kugelwelle (Bd. I §§ 68 u. 69).

## § 37. Das Temperaturgefälle in der Erdrinde.

Als eine Lösung der Gleichung (33) fanden wir im § 33

$$r u = e^{-\gamma t}\left(A \cos r\sqrt{\frac{\gamma}{m}} + B \sin r\sqrt{\frac{\gamma}{m}}\right).$$

Für $r = 0$ soll die Temperatur einen endlichen Wert behalten. Dann muß $A = 0$ sein und es bleibt uns

$$u = B e^{-\gamma t} \frac{\sin r \sqrt{\frac{\gamma}{m}}}{r} . \tag{34}$$

Die Wärmemenge, welche durch die Flächeneinheit der Kugeloberfläche in der Zeiteinheit geht, können wir auf zweierlei Art ausdrücken. Sie ist erstens gleich $-k \frac{\partial u}{\partial r}$, ferner gleich $h u$ (§ 31). Wir haben somit

$$-k \frac{\partial u}{\partial r} = h u$$

oder

$$\frac{\partial u}{\partial r} + n u = 0 , \tag{35}$$

wenn wir

$$\frac{h}{k} = n$$

setzen. Doch gilt diese Gleichung nur für die Oberfläche der Kugel, d. h. für $r = \varrho$, wobei also $\varrho$ der Kugelradius ist. Wir können $\frac{\partial u}{\partial r}$ aus Gleichung (34) finden. Wir erhalten dafür

$$\frac{\partial u}{\partial r} = B e^{-\gamma t} \left( \sqrt{\frac{\gamma}{m}} \frac{\cos r \sqrt{\frac{\gamma}{m}}}{r} - \frac{\sin r \sqrt{\frac{\gamma}{m}}}{r^2} \right) .$$

Setzen wir hier wie in der Gleichung (34) $r = \varrho$, so gestaltet sich Gleichung (35) folgendermaßen:

$$Be^{-\gamma t}\left(\frac{\sqrt{\frac{\gamma}{m}}\cos\varrho\sqrt{\frac{\gamma}{m}}}{\varrho}-\frac{\sin\varrho\sqrt{\frac{\gamma}{m}}}{\varrho^2}\right)$$

$$+\,n\,Be^{-\gamma t}\frac{\sin\varrho\sqrt{\frac{\gamma}{m}}}{\varrho}=0\,,$$

welche sich leicht verwandeln läßt in

$$\sin\varrho\sqrt{\frac{\gamma}{m}}(n\varrho-1)+\varrho\sqrt{\frac{\gamma}{m}}\cos\varrho\sqrt{\frac{\gamma}{m}}=0$$

oder

$$\operatorname{tg}\varrho\sqrt{\frac{\gamma}{m}}=\frac{\varrho\sqrt{\frac{\gamma}{m}}}{1-n\varrho}\,.$$

Setzen wir $\varrho\sqrt{\frac{\gamma}{m}}=x$, so vereinfacht sie sich noch zu

$$\operatorname{tg}x=\frac{x}{1-n\varrho}\,. \qquad (36)$$

Diese letzte Gleichung können wir nun sehr leicht auf graphischem Weg lösen, wenn wir sowohl $\operatorname{tg}x$ als auch $\frac{x}{1-n\varrho}$ in ein rechtwinkeliges Koordinatensystem eintragen.

Wir wollen eine Anwendung davon auf unsere Erde machen. Es wird somit $\varrho$ sehr groß, also $\frac{1}{1-n\varrho}$ eine kleine negative Zahl. Es ist daher die Kurve

$$y=\frac{x}{1-n\varrho}$$

eine Gerade, welche vom Ursprung 0 (Fig. 43) ausgeht, mit der x-Achse einen sehr kleinen Winkel bildet und für positive x unterhalb der x-Achse liegt. Wo diese Gerade die zweite Kurve

$$y = \operatorname{tg} x$$

schneidet, dort ist immer eine Wurzel der Gleichung (36). Wir erhalten somit unendlich viel Werte für x

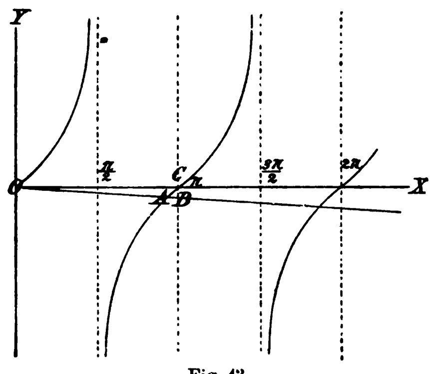



Fig. 43.

und somit auch für $\gamma$. Die Gleichung (34) verwandelt sich daher in eine unendliche Reihe. Das erste Glied fällt ganz weg, weil dafür $x = 0$, also auch $\gamma = 0$ ist. Die nächste Wurzel von x liegt nahe bei $\pi$, die zweitnächste nahe bei $2\pi$ usw. Sie werden sich also nahezu verhalten wie $1:2:3\ldots$, folglich die Werte der $\gamma$ nahezu wie $1:4:9\ldots$ Das heißt, die höheren Glieder unserer unendlichen Reihe nehmen mit wachsender Zeit sehr rasch ab, so daß wir uns nach einiger Zeit lediglich auf die Gleichung

$$u = B_1 e^{-\gamma t} \frac{\sin r \sqrt{\frac{\gamma_1}{m}}}{r}$$

beschränken können.

Wir wollen nun $x_1 = \pi - \varepsilon$ setzen, wobei $\varepsilon$ sehr klein ist. Aus dieser Ursache können wir aber dann ABC (Fig. 43) als ein rechtwinkeliges Dreieck auffassen und

$$AB = BC = \varepsilon = -\frac{\pi}{1 - n\varrho} = \frac{\pi}{n\varrho}$$

setzen. Somit wird

$$x_1 = \pi\left(1 - \frac{1}{n\varrho}\right),$$

$$\sqrt{\frac{\gamma_1}{m}} = \frac{x_1}{\varrho} = \frac{\pi}{\varrho}\left(1 - \frac{1}{n\varrho}\right)$$

und

$$\gamma_1 = m\frac{\pi^2}{\varrho^2},$$

indem wir die anderen Glieder vernachlässigen können. Führen wir die Tiefe z ein, so wird

$$r = \varrho - z,$$

und es soll z gegen $\varrho$ ebenfalls eine kleine Größe sein. Wir haben dann

$$\sin r\sqrt{\frac{\gamma_1}{m}} = \sin\frac{\pi}{\varrho}(\varrho - z)\left(1 - \frac{1}{n\varrho}\right)$$

$$= \sin\pi\left(1 - \frac{z}{\varrho}\right)\left(1 - \frac{1}{n\varrho}\right) = \sin\left(\pi - \frac{\pi z}{\varrho} - \frac{\pi}{n\varrho}\right)$$

$$= \sin\frac{\pi}{\varrho}\left(z + \frac{1}{n}\right) = \frac{\pi}{\varrho}\left(z = \frac{1}{n}\right),$$

da wir wegen der Kleinheit von $\frac{\pi}{\varrho}$ den Sinus mit dem Bogen vertauschen können. Wir erhalten demnach weiter

$$\frac{\sin r\sqrt{\frac{\gamma_1}{m}}}{r} = \frac{\pi}{\varrho^2}\left(z + \frac{1}{n}\right),$$

wenn wir z gegen $\varrho$ vernachlässigen, was hier erlaubt ist. Somit wird schließlich

$$u = \frac{B_1 \pi}{n\varrho^2} e^{-\frac{m\pi^2}{\varrho^2}t}(1 + n z).$$

Es muß also die Temperatur von der Oberfläche gegen das Erdinnere mit der Tiefe linear zunehmen. Die Erfahrung lehrt, daß die Temperaturzunahme für 30 m etwa $1^0$ C. beträgt.

## § 38. Abkühlung der Erde.

Für ein konstantes r wird nach Gleichung (34) die Temperatur lediglich eine Funktion der Zeit, welche für unsere Erde die Form

$$u = A e^{-\frac{m\pi^2}{\varrho^2}t}$$

annimmt. Setzen wir für die Zeit $t = 0$ die Temperatur $u = u_0$, so wird $A = u_0$ und

$$u = u_0 e^{-\frac{m\pi^2}{\varrho^2}t},$$

$$\frac{du}{dt} = -\frac{m\pi^2 u_0}{\varrho^2},$$

da wir wegen des großen $\varrho^2$ $e^{-\frac{m\pi^2}{\varrho^2}t} = 1$ setzen können.

Die Temperatur unter der Erdoberfläche muß demnach mit der Zeit abnehmen, doch geschieht dies ungemein langsam.

Da $u_0$ der Überschuß über die Temperatur der Umgebung der Erde ist, so müßten wir, um $\frac{du}{dt}$ berechnen zu können, die Temperatur des Weltraums kennen. Aber selbst wenn diese den absoluten Nullpunkt, d. h. $-273^0$ C. erreicht hätte, würde $\frac{du}{dt}$ so klein, daß die Temperatur der Erdrinde erst in vielen Millionen Jahren um $1^0$ sinkt.

Die Wärmemenge, welche durch die Oberflächeneinheit der Erde in der Zeiteinheit ausgestrahlt wird, ist $-k\frac{du}{dr}$. Wir können dieselbe berechnen, da wir sowohl $\frac{du}{dr}$ kennen, als auch die Wärmeleitungsfähigkeit k der Erde (§ 34) bestimmbar ist. Es ergibt sich daraus, daß jährlich eine Wärmemenge aus dem Innern der Erde zur Oberfläche strömt, welche imstande ist, eine neun Millimeter dicke Eisschicht zu schmelzen. Es kommt diese Wärmemenge somit im Vergleich zu der von der Sonne gespendeten Wärme gar nicht in Betracht. Ob es daher im Innern der Erde kalt oder heiß ist, für die Lebensbedingungen auf der Oberfläche ist das völlig belanglos.

# Mechanische Wärmetheorie.

## § 39. Zustand eines Körpers — Zustandsgleichung idealer Gase — absolute Temperatur.

Wir fassen die Wärme als Bewegung der kleinsten Teilchen der Körper auf. Zu einem gegebenen Zeitpunkt wird daher jedes Teilchen eine bestimmte Lage und eine bestimmte Geschwindigkeit besitzen. Wir nennen dies den Zustand des Körpers. Um ihn zu kennen, ist es nicht nötig, den Zustand jedes einzelnen Körperteilchens zu wissen, sondern bloß die Mittelwerte der den Zustand bestimmenden Größen, da ja die thermischen Erscheinungen, welche wir an einem Körper wahrnehmen, durch das Zusammenwirken der kleinsten Teilchen hervorgebracht werden. Der Zustand eines Körpers ist sonach in unserm Sinn bestimmt durch seine Temperatur, sein Volumen, seine Gestalt und die auf ihn wirkenden äußeren und inneren Kräfte. Soweit diese verschiedenen Größen voneinander abhängig sind, lassen sie sich in Gleichungen fassen, und jene Gleichung, welche alle den Zustand bestimmenden Größen untereinander verbindet, nennen wir die Zustandsgleichung des Körpers.

Diese ist z. B. für ideale Gase durch das Boyle-Charlessche Gesetz

$$p\,v = p_0\,v_0\,(1 + \alpha\,t)$$

gegeben. Das heißt, der Zustand eines Gases ist vollständig durch sein Volumen v, seine Temperatur t und den Druck p, unter dem es sich befindet, gegeben. Benutzen wir das hundertteilige Thermometer, so ist $\alpha = \frac{1}{273}$. Verlegen wir daher den Nullpunkt auf

— 273° C., so wird

$$p\,v = p_0\,v_0\,\alpha\left(\frac{1}{\alpha} + t\right) = p_0\,v_0\,\alpha\,T = R\,T\,.$$

In der Form

$$p\,v = R\,T \tag{37}$$

wollen wir das Boyle-Charlessche Gesetz künftig benutzen und

$$T = t + \frac{1}{\alpha}$$

die absolute Temperatur nennen.

### § 40. Umwandelbarkeit der Wärme in Arbeit und der Arbeit in Wärme — mechanisches Wärmeäquivalent — äußere und innere Arbeit — erster Hauptsatz.

R. Mayer hat zuerst bestimmt ausgesprochen, daß Arbeit in Wärme und Wärme in Arbeit verwandelt werden kann und daß einer Kalorie — d. i. jene Wärmemenge, welche ein Kilogramm Wasser von 0° auf 1° C. erhöht — ein ganz bestimmter Arbeitswert zukommt. Die experimentellen Untersuchungen haben gelehrt, daß einer Kalorie rund 427 mkg entsprechen, welche Zahl man daher das mechanische Wärmeäquivalent nennt. Da das Gewicht eines Kilogramms sich mit dem Breitengrad ändert, so ist es für praktische Arbeiten manchmal angezeigter, den Wert des mechanischen Wärmeäquivalents in absolutem Maß anzugeben.

Führen wir einem Körper Wärme zu, so wird im allgemeinen seine Temperatur und seine Gestalt verändert. Es muß daher eine Arbeit aufgewandt werden, um die inneren Kräfte zu überwinden und die Energie der kleinsten Teilchen zu erhöhen. Man nennt dies die

innere Arbeit oder die Vermehrung der inneren Energie, welche auf Kosten der Wärme erzeugt wird. Ferner ist Arbeit zur Überwindung der äußeren Kräfte notwendig, welche wir analog die äußere Arbeit nennen. Es wird sich daher die unendlich kleine Wärmemenge $dQ$, welche wir einem Körper zuführen, in einen Teil $dU$ zerlegen lassen, welcher die Temperaturerhöhung und die innere Arbeit bewirkt, und einen zweiten, der die äußere Arbeit $dK$ leistet. Um diese Arbeit in Wärmemaß zu bekommen, haben wir sie durch das mechanische Wärmeäquivalent $E$ zu dividieren oder mit dem reziproken Wert desselben, dem kalorischen Arbeitsäquivalent $A = \frac{1}{E}$ zu multiplizieren. Sonach erhalten wir nach dem Satz von der Erhaltung der Energie die Gleichung

$$dQ = dU + A\,dK\,, \tag{38}$$

welche man gewöhnlich den ersten Hauptsatz der mechanischen Wärmetheorie nennt.

### § 41. Spezifische Wärme der Gase bei konstantem Volumen und konstantem Druck.

Steht ein Körper unter keiner äußeren Kraft als einem konstanten, senkrecht zu seiner Oberfläche wirkenden Druck $p$, wie es etwa der Luftdruck ist, so wird die zugeführte Wärmemenge $dQ$ lediglich eine kleine Volumsänderung hervorbringen. Jedes Oberflächenelement $d\omega$ legt dabei einen Weg $\delta n$ zurück. Die äußere Arbeit, welche geleistet wird, ist sonach gleich dem Produkt aus der Kraft $p\,d\omega$ in den Weg $\delta n$, die Gesamtarbeit also

$$dK = \int p\,\delta n\,d\omega = p\int \delta n\,d\omega = p\,dv\,,$$

da ja $\int \delta\, n\, d\omega$ nichts anderes als die Volumszunahme $dv$ des Körpers ist. Es verwandelt sich daher die Gleichung (38) in

$$dQ = dU + A p dv. \tag{39}$$

Die innere Arbeit wird im allgemeinen ebenfalls eine Funktion der Temperatur, des Drucks und des Volumens sein. Da aber eine dieser drei Größen wegen der Gleichung (37) immer durch die beiden andern bestimmt werden kann, so genügt es,

$$U = f(v, T)$$

zu setzen, wonach

$$dU = \frac{\partial f}{\partial v} dv + \frac{\partial f}{\partial T} dT$$

wird.

Es hat nun schon Gay-Lussac gezeigt, daß ein Gas, wenn es sich ohne äußere Arbeitsleistung ausdehnt, seine Temperatur nicht ändert. Es leistet daher ein Gas bei der Volumsveränderung auch keine innere Arbeit, d. h. es muß die Größe

$$\frac{\partial f}{\partial v} = 0$$

sein. Setzen wir $\frac{\partial f}{\partial T} = c$, so können wir Gleichung (39) schreiben

$$dQ = c\, dT + A p dv. \tag{40}$$

Wir wollen voraussetzen, daß sich unsere Gleichung auf die Masseneinheit Gas bezieht. Führen wir die Wärme bei konstantem Volumen zu, so ist $dv = 0$, folglich $\frac{dQ}{dT} = c$ die spezifische Wärme bei konstantem Volumen.

Die Differentiation der Zustandsgleichung (37) ergibt

$$p\,d\,v + v\,d\,p = R\,d\,T\,. \qquad (41)$$

Dadurch können wir Gleichung (40) in

$$dQ = (c + AR)\,dT - A\,v\,d\,p$$

verwandeln. Nehmen wir eine Wärmeausdehnung bei konstantem Druck vor, so wird $dp = 0$, folglich

$$\frac{dQ}{dT} = c + AR = C\,.$$

Dies ist also die spezifische Wärme des Gases bei konstantem Druck.

## § 42. Adiabatische Zustandsänderungen.

Verändern wir den Zustand eines Körpers, ohne daß ihm Wärme zu- oder abgeführt wird, so nennen wir dies eine adiabatische Zustandsänderung. Für eine solche muß also in Gleichung (40)

$$dQ = o$$

werden. Dividieren wir dann die Gleichung noch durch $p\,v = RT$, so ergibt dies

$$o = \frac{c\,dT}{RT} + \frac{A\,dv}{v} \qquad \text{oder} \qquad o = \frac{c\,dT}{T} + \frac{ARdv}{v}\,.$$

Durch Integration erhalten wir

$$c\,l\,T + AR\,l\,v = G\,.$$

Zu Beginn des Prozesses sei diese Gleichung

$$c\,l\,T_0 + AR\,l\,v_0 = G\,.$$

Durch Subtraktion beider Gleichungen folgt

$$c\,l\frac{T}{T_0} + AR\,l\frac{v}{v_0} = 0\,,$$

was wir schließlich noch umwandeln können in

$$l\left(\frac{T}{T_0}\right)^c + \left(\frac{v}{v_0}\right)^{AR} = 0 \qquad \text{oder} \qquad \left(\frac{T}{T_0}\right)^c \left(\frac{v}{v_0}\right)^{AR} = 1.$$

Beachten wir noch, daß

$$C - c = AR,$$

so bleibt uns schließlich

$$\frac{T}{T_0} = \left(\frac{v_0}{v}\right)^{\frac{C}{c}-1} = \left(\frac{v_0}{v}\right)^{\varkappa-1}, \tag{42}$$

wenn wir das Verhältnis der spezifischen Wärmen $\varkappa$ nennen. Diese Gleichung besagt somit, daß durch Kompression eines Gases seine Temperatur erhöht, durch Ausdehnung erniedrigt wird.

Auf ähnliche Weise können wir auch die Beziehung zwischen Druck und Volumen bei einer adiabatischen Zustandsänderung eines Gases finden. Ersetzen wir in Gleichung (40) $dT$ durch $\frac{p\,dv + v\,dp}{R}$ aus der Gleichung (41), so wird

$$dQ = \frac{c}{R}(p\,dv + v\,dp) + A\,p\,dv$$

$$= \frac{(c + AR)\,p\,dv + c\,v\,dp}{R} = \frac{C\,p\,dv + c\,v\,dp}{R}.$$

Für eine adiabatische Änderung muß wieder $dQ = 0$, also

$$C\,p\,dv + c\,v\,dp = 0$$

sein, was durch $p\,v$ dividiert

$$C\frac{dv}{v} + c\frac{dp}{p} = 0$$

ergibt. Durch Integration finden wir wie früher

$$C\,l\frac{v}{v_0} + c\,l\frac{p}{p_0} = 0 \qquad \text{oder} \qquad \frac{p}{p_0} = \left(\frac{v_0}{v}\right)^{\varkappa} = \left(\frac{\varrho}{\varrho_0}\right)^{\varkappa},$$

wenn wir $\varrho$ die Dichte des Gases nennen. Diese Formel mußten wir benutzen, um die Schallgeschwindigkeit in der Luft zu finden (Bd. I § 66).

## § 43. Kreisprozeß.

Lassen wir den Zustand eines Körpers verschiedene Änderungen durchmachen, bis er wieder den Anfangszustand erreicht, so nennen wir das einen Kreisprozeß. Können die Veränderungen auch in entgegengesetzter Richtung ablaufen, so ist es ein umkehrbarer Kreisprozeß. Einen solchen wollen wir an einem idealen Gas vornehmen. Wir stellen den Zustand der Masseneinheit des Gases durch einen Punkt in einem rechtwinkligen Koordinatensystem dar (Fig. 44), dessen Abszisse das Volumen, während die Ordinate den Druck bedeutet. Die Kurve, welche wir für eine konstante Temperatur dabei erhalten, nennen wir eine Isotherme. Bei einem idealen Gas ist sie

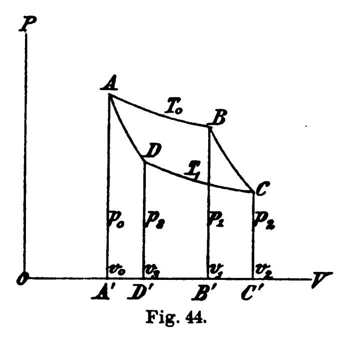


Fig. 44.

$$p\,v = \text{konst.},$$

also eine gleichseitige Hyperbel.

Der Punkt A sei der Anfangszustand des Gases bei der Temperatur $T_0$, dem Druck $p_0$ und dem Vo-

lumen $v_0$. Das Gas dehne sich jetzt isotherm, d. h. bei konstanter Temperatur $T_0$ aus bis zum Zustand B mit den zugehörigen Größen $T_0$, $p_1$, $v_1$. Für diesen Vorgang ist also $dT = o$, daher nach Gleichung (40)

$$dQ = A p dv.$$

Die gesamte Wärme $Q_0$, welche wir auf dem Weg von A nach B in unser Gas hineinstecken, wird also nur zur Arbeitsleistung verwendet, und es ist

$$(43) \qquad Q_0 = A \int_{v_0}^{v_1} p\, dv = ART_0 \int_{v_0}^{v_1} \frac{dv}{v} = ART_0 \, l \frac{v_1}{v_0},$$

da ja $pv = RT_0$ ist.

Wir nehmen nun eine adiabatische Ausdehnung vor. Bei dieser wird somit der Zustand von B längs einer adiabatischen Kurve bis C vorrücken. Wir führen also Wärme weder zu noch ab. Das Gas kühlt sich daher von der Temperatur $T_0$ auf $T_1$ ab, und wir haben nach Gleichung (42)

$$(44) \qquad v_1^{\varkappa - 1} T_0 = v_2^{\varkappa - 1} T_1 .$$

Wir komprimieren nun das Gas isotherm, haben somit eine Wärmemenge

$$Q_1 = ART_1 \, l \frac{v_3}{v_2}$$

zuzuführen. Diese Wärmemenge erscheint aber, da $v_3 < v_2$, negativ, es wird in Wirklichkeit dem Gas Wärme entzogen. Die Kompression wird längs CD so lange fortgesetzt, bis die Isotherme die durch den Punkt A gezogene Adiabate in D schneidet. Von dort aus komprimieren wir dann weiter adiabatisch, langen also wieder beim Ausgangspunkt in A an. Für den letzten Vorgang gilt die Gleichung

$$(45) \qquad v_3^{\varkappa - 1} T_1 = v_0^{\varkappa - 1} T_0 .$$

Multiplizieren wir die Gleichungen (44) und (45) miteinander, so finden wir $v_1 v_3 = v_0 v_2$ oder

$$\frac{v_1}{v_0} = \frac{v_2}{v_3}.$$

Daher ist

$$Q_1 = A R T_1 \, l \frac{v_3}{v_2} = - A R T_1 \, l \frac{v_1}{v_0},$$

was mit Gleichung (43) vereinigt ergibt

$$\frac{Q_0}{T_0} = - \frac{Q_1}{T_1},$$

wo also das negative Vorzeichen sagt, daß $Q_1$ eine dem Gas entzogene Wärmemenge ist. Rechnen wir hingegen jede Menge positiv, so ist die in Arbeit umgewandelte Wärme $Q_0 - Q_1$. Sie entspricht in Fig. 44 der Fläche ABCD, da ja die Flächen ABB′A′, BCC′B′ usw. die geleistete bezgl. aufgewendete Arbeit bei den einzelnen Vorgängen des Kreisprozesses darstellen.

Von der Wärmemenge $Q_0$, welche bei der Temperatur $T_0$ in das Gas hineingesteckt wird, wird also nur der Teil $Q_0 - Q_1$ in Arbeit verwandelt, während die Wärmemenge $Q_1$ bei der Temperatur $T_1$ wieder abgegeben wird. Da sich der Kreisprozeß beliebig wiederholen läßt, so haben wir hier eine sogenannte kalorische Maschine vor uns, welche Wärme in Arbeit verwandelt. Doch ist es nur der Bruchteil

$$\frac{Q_0 - Q_1}{Q_0} = \frac{T_0 - T_1}{T_0},$$

welcher wirklich von der gesamten aufgewendeten Wärme in Arbeit verwandelt wird. Je größer dieser Bruch ist, desto besser wird die Wärme ausgenützt.

Man nennt daher die Größe $\frac{T_0 - T_1}{T_0}$ den ökonomischen Koeffizienten der Maschine. Diese arbeitet mithin um so ökonomischer, je größer der Temperaturunterschied $T_0 - T_1$ ist.

## § 44. Entropie — zweiter Hauptsatz.

Es ist nicht nötig, einen Kreisprozeß einfach längs der früher gewählten Isothermen und Adiabaten vor sich gehen zu lassen, sondern es kann dies längs jeder beliebigen geschlossenen Kurve geschehen, indem die Gleichung (40), wenn wir sie in der Form

$$A p d v = d Q - c d T$$

schreiben, ersichtlich ja nichts anderes als die Summe aus einem adiabatischen und einem isothermen Vorgang enthält, welche bei der graphischen Darstellung eine geometrische Summe wird. Je nach der Fläche der geschlossenen Kurve wird daher das Integral der Gleichung (40) verschiedene Werte annehmen können. Dividieren wir die gesamte Gleichung durch die absolute Temperatur T, so erhalten wir

$$\frac{dQ}{T} = \frac{c\,dT}{T} + \frac{AR\,dv}{v}.$$

Integrieren wir nun diese Gleichung zwischen zwei Punkten der Kurve, welche den Größen $T_0$, $v_0$ und $T_1$, $v_1$ entsprechen, so wird

$$\int_0^1 \frac{dQ}{T} = c\,l\,\frac{T_1}{T_0} + AR\,l\,\frac{v_1}{v_0}.$$

Es ist also ganz gleichgültig, auf welchem Weg wir von dem einen zum andern Punkt ge-

langen, da das Integral nur vom Anfangs- und Endwert abhängig ist. Für jede geschlossene Kurve ist somit

$$\int \frac{dQ}{T} = 0 . \tag{46}$$

Man pflegt daher $\frac{dQ}{T}$ ein vollständiges Differential zu nennen. Wir wollen

$$\frac{dQ}{T} = dS$$

setzen, wonach wir erhalten

$$\int \frac{dQ}{T} = S + C .$$

Clausius nennt S die Entropie des Gases. Wir werden später sehen, daß wir dieselben Überlegungen auf jeden beliebigen Körper anwenden können.

Die Gleichung (46) ist der Inhalt des zweiten Hauptsatzes der mechanischen Wärmetheorie, den wir etwa folgendermaßen formulieren können: Rechnen wir die zugeführte Wärme positiv, die entzogene negativ, so ist die Summe aller unendlich kleinen Wärmemengen, jede dividiert durch ihre jeweilige Temperatur für einen umkehrbaren Kreisprozeß, gleich Null.

Bei jeder adiabatischen Zustandsänderung ist $dQ = 0$, es wird daher

$$\int \frac{dQ}{T} = C ,$$

d. h. die Entropie bleibt konstant, weshalb man die adiabatischen Vorgänge auch isentropische nennt.

**§ 45. Unabhängigkeit des zweiten Hauptsatzes von der Natur der Körper — thermisches Perpetuum mobile.**

Wie wir durch einen umkehrbaren Kreisprozeß Wärme in Arbeit verwandeln können, so läßt sich auch Arbeit in Wärme umsetzen, sobald wir den Prozeß entgegengesetzt durchlaufen. Gleichzeitig wird eine gewisse Wärmemenge auf höhere Temperatur gebracht. Wie ein Gas können wir auch jeden anderen beliebigen Körper zwei isotherme und zwei adiabatische Kurven durchlaufen lassen und somit einen umkehrbaren Kreisprozeß herstellen. Umgrenzen die Kurven eine Fläche von derselben Größe wie der Kreislauf eines Gases, so leisten beide Prozesse dieselbe Arbeit. Lassen wir sie daher entgegengesetzt vor sich gehen, so heben sie sich in ihrer Wirkung auf. Aber es wäre noch die Möglichkeit vorhanden, daß die Wärmemengen, welche von tieferer auf höhere Temperatur und umgekehrt befördert werden, verschieden sind. Das widerspricht aber dem Erfahrungssatz, daß es noch niemals in der Natur beobachtet wurde, daß Wärme ohne vorhandene anderweitige Energieänderung von selbst zu höherer Temperatur aufsteigen kann. Es muß daher auch für unsern zweiten Kreisprozeß wie für das Gas die Gleichung

$$\frac{Q_0}{T_0} = \frac{Q_1}{T_1}$$

gelten. Schon Carnot sprach aus, daß bei der durch die Wärme hervorgebrachten Arbeit nur die Temperaturen, nicht aber die dazu verwendeten Körper maßgebend sind.

Wäre es möglich, daß Wärme von selbst zu höherer Temperatur aufsteigt, so könnte ein beständiger Wärme-

kreislauf ohne Arbeitsleistung hergestellt werden, indem ja durch Leitung oder Strahlung die Wärme wieder auf ihre ursprüngliche Temperatur sinken würde. Man hätte dann ein sogenanntes thermisches Perpetuum mobile. Aber dieses ist ebenso unmöglich wie ein mechanisches.

Der zweite Hauptsatz hat in der von uns gegebenen Form die Voraussetzung einer willkürlichen Temperatur, indem wir ein ideales Gas als thermometrische Substanz benützten. Hätten wir ein anderes Temperaturmaß gewählt, so würden wir auch eine andere Form des zweiten Hauptsatzes erhalten haben. W. Thomson machte daher den Vorschlag, den zweiten Hauptsatz direkt zur Temperaturdefinition zu benützen, da dann das Temperaturmaß von einer thermometrischen Substanz völlig unabhängig wird. Willkürlich bleibt jedoch wiederum die Wahl der Form der Temperaturfunktion, und es darf die Annahme der sogenannten absoluten Temperatur nur als eine Folge der Gewohnheit angesehen werden.

### § 46. Anwendung der beiden Hauptsätze.

Wir lernten den ersten Hauptsatz in der Form

$$dQ = dU + A p dv$$

kennen. Hier ist die Größe dU ebenso ein vollständiges Differential wie das Differential der Entropie $\frac{dQ}{T}$. Es zeigt sich nämlich in der Erfahrung, daß die Wärmemenge, welche wir einem Körper lediglich zur Änderung seines Zustandes abgesehen von der äußeren Arbeitsleistung zuführen müssen, nur vom Anfangs- und Endwert des Zustands abhängig ist, hingegen völlig unabhängig von den Zwischenzuständen.

Wir machen nun die Annahme, der Zustand eines Körpers sei durch die Temperatur T und das Volumen v vollständig bestimmt. Die beiden Differentiale der inneren Energie und der Entropie sind sonach Funktionen von T und v und ebenso die dem Körper zugeführte Wärmemenge dQ. Wir wollen deshalb

$$dQ = \alpha\, dT + \beta\, dv$$

setzen, wobei $\alpha$ und $\beta$ Funktionen von T und v sind. Betrachten wir die Gewichtseinheit des Körpers, so ergibt sich ohne weiteres, daß $\alpha$ die spezifische Wärme bei konstantem Volumen ist, da dann $dv = 0$ wird. Jedes vollständige Differential dF, das eine Funktion von T und v ist, können wir schreiben

$$dF = \frac{\partial F}{\partial T} dT + \frac{\partial F}{\partial v} dv = M\, dT + N\, dv$$

und es folgt

$$\frac{\partial M}{\partial v} = \frac{\partial N}{\partial T} = \frac{\partial^2 F}{\partial T\, \partial v}.$$

Demnach können wir aus

$$dU = dQ - A\, p\, dv = \alpha\, dT + (\beta - A\, p)\, dv$$

die Folgerung ziehen:

$$\frac{\partial \alpha}{\partial v} = \frac{\partial (\beta - A\, p)}{\partial T} = \frac{\partial \beta}{\partial T} - A \frac{\partial p}{\partial T}. \tag{47}$$

Ferner haben wir

$$\frac{dQ}{T} = \frac{\alpha}{T} dT + \frac{\beta}{T} dv$$

und wiederum gilt

$$\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\alpha}{T}\right) = \frac{\partial}{\partial T}\left(\frac{\beta}{T}\right)$$

oder

$$\frac{1}{T}\frac{\partial \alpha}{\partial v} = \frac{1}{T}\frac{\partial \beta}{\partial T} - \frac{\beta}{T^2},$$

$$\frac{\partial \alpha}{\partial v} = \frac{\partial \beta}{\partial T} - \frac{\beta}{T}. \tag{48}$$

Aus den Gleichungen (47) und (48) erhalten wir

$$\beta = A T \frac{\partial p}{\partial T},$$

folglich

$$dQ = \alpha\, dT + A T \frac{\partial p}{\partial T} dv. \tag{49}$$

Stellen wir den Zustand als Funktion der Temperatur und des Drucks, also durch T und p dar, so können wir

$$dQ = \gamma\, dT + \eta\, dp$$

setzen, wobei also $\gamma$ die spezifische Wärme bei konstantem Druck ist. Wir haben dann

$$dU = dQ - A p\, dv = dQ - A p \left(\frac{\partial v}{\partial T} dT + \frac{\partial v}{\partial p} dp\right),$$

da wir jetzt v als Funktion von T und p auffassen müssen. Aus

$$dU = \left(\gamma - A p \frac{\partial v}{\partial T}\right) dT + \left(\eta - A p \frac{\partial v}{\partial p}\right) dp$$

finden wir

$$\frac{\partial}{\partial p}\left(\gamma - A p \frac{\partial v}{\partial T}\right) = \frac{\partial}{\partial T}\left(\eta - A p \frac{\partial v}{\partial p}\right);$$

führen wir die Differentiation durch, so ergibt sich

$$\frac{\partial \gamma}{\partial p} - A \frac{\partial v}{\partial T} - A p \frac{\partial^2 v}{\partial p\, \partial T} = \frac{\partial \eta}{\partial T} - A p \frac{\partial^2 v}{\partial p\, \partial T},$$

oder

$$\frac{\partial \gamma}{\partial p} - A \frac{\partial v}{\partial T} = \frac{\partial \eta}{\partial T}. \tag{50}$$

Wir haben nun weiter

$$\frac{dQ}{T} = \frac{\gamma}{T} dT + \frac{\eta}{T} dp,$$

folglich

$$\frac{\partial}{\partial p}\left(\frac{\gamma}{T}\right) = \frac{\partial}{\partial T}\left(\frac{\eta}{T}\right),$$

$$\frac{1}{T}\frac{\partial \gamma}{\partial p} = \frac{1}{T}\frac{\partial \eta}{\partial T} - \frac{\eta}{T^2},$$

$$\frac{\partial \gamma}{\partial p} = \frac{\partial \eta}{\partial T} - \frac{\eta}{T} \tag{51}$$

und aus den Gleichungen (50) und (51)

$$\eta = -AT\frac{\partial v}{\partial T},$$

$$dQ = \gamma dT - AT\frac{\partial v}{\partial T} dp. \tag{52}$$

Analog diesem Vorgang ist es nicht schwer, für beliebige Variable, welche den Zustand bestimmen, die entsprechende Gleichung herzuleiten.

### § 47. Verdampfungswärme — Schmelzwärme — gesättigter Dampf — Schmelzpunkt.

Wir haben in einem geschlossenen Gefäß die Masseneinheit eines Körpers teilweise in flüssigem, teilweise in dampfförmigem Zustand. Das Gewicht des Dampfes sei x, das der Flüssigkeit also $1 - x$. Das Volumen v des Gefäßes ist demnach

$$v = \frac{1-x}{s} + \frac{x}{\sigma} = \frac{1}{s} + \left(\frac{1}{\sigma} - \frac{1}{s}\right)x = u' + (u - u')x,$$

wenn s und $\sigma$ das spezifische Gewicht der Flüssigkeit bezgl. ihres gesättigten Dampfes ist. Es ist $u'$ also das

sogenannte spezifische Volumen der Flüssigkeit, u jenes des Dampfes. Wir wollen nun eine Verdampfung der Flüssigkeit bei konstanter Temperatur vornehmen. Dann wird $dT = 0$ und Gleichung (49)

$$dQ = AT\frac{\partial p}{\partial T}(u - u')\,dx\,.$$

Nennen wir die Verdampfungswärme r, so wird

$$dQ = r\,dx\,,$$

daher

$$r = AT\frac{\partial p}{\partial T}(u - u')\,. \qquad (53)$$

Diese Formel können wir benützen, um z. B. die Dichte des gesättigten Dampfes $\frac{1}{u}$ zu finden, wenn die übrigen Größen bekannt sind.

Wir wollen jetzt die Temperatur der Masseneinheit des gesättigten Dampfes um dT erhöhen, dabei den Druck und das Volumen aber derart ändern, daß der Dampf gesättigt bleibt. Die Gleichung (39) läßt sich, auf unsern Fall angewendet, schreiben

$$dQ = \left(\frac{\partial U}{\partial T} + Ap\frac{\partial u}{\partial T}\right)dT\,, \qquad (53a)$$

hingegen auf die Verdampfungswärme angewendet, ergibt die Integration

$$r = U_1 - U_2 + Ap(u - u')\,,$$

wenn wir unter $U_1$ die innere Energie der Masseneinheit Dampf, unter $U_2$ dieselbe Größe für die Masseneinheit Flüssigkeit verstehen. Nun können wir aber annehmen, daß

$$U_2 = cT + k\,,$$

wobei c die spezifische Wärme der Flüssigkeit und k eine Konstante bedeutet. Danach erhalten wir

$$U_1 = r + cT + k - Ap(u - u'),$$

$$\frac{\partial U_1}{\partial T} = \frac{dr}{dT} + c - Ap\frac{\partial u}{\partial T} - A(u - u')\frac{\partial p}{\partial T},$$

da wir das spezifische Volumen $u'$ der Flüssigkeit mit großer Annäherung als konstant ansehen können. Diesen Ausdruck haben wir für $\frac{\partial U}{\partial T}$ in Gleichung (53a) einzusetzen, wobei wir nach Gleichung (53) $A(u - u')\frac{\partial p}{\partial T} = \frac{r}{T}$ einführen wollen. Das ergibt

$$dQ = \left(\frac{dr}{dT} - \frac{r}{T} + c\right) dT .$$

Die Größe

$$\gamma = \frac{dr}{dT} - \frac{r}{T} + c$$

können wir somit die spezifische Wärme des gesättigten Dampfes nennen. Wie man sieht, kann sie positiv oder negativ sein. In letzterem Fall können wir den Dampf komprimieren, erhöhen dabei seine Temperatur und bewirken, daß er nicht mehr gesättigt ist. Wir müssen ihm Wärme entziehen, wenn er gesättigt bleiben soll. Lassen wir einen derartig gesättigten Dampf sich ausdehnen, so wird er übersättigt und es tritt Kondensation ein. Es verhält sich so der Wasserdampf bei gewöhnlicher Temperatur. Es tritt daher gewöhnlich klares Wetter ein, wenn der Wind vom Berg ins Tal weht, da unten der Luftdruck höher ist, als oben. Steigt jedoch der Wind, so ist dies in der Regel mit Wolkenbildung verbunden.

Die Gleichung (53) gilt nun ebenso für einen festen Körper und seinen Dampf, wie etwa für Eis und den dabei befindlichen Wasserdampf. Sie gilt für die Schmelzwärme eines Körpers, wenn wir r damit bezeichnen, unter p den Flüssigkeitsdruck beim Schmelzpunkt, unter u und u' das spezifische Volumen des flüssigen bezgl. festen Körpers verstehen. Schreiben wir z. B. die Gleichung

$$\frac{\partial p}{\partial T} = \frac{r}{AT(u - u')},$$

und bedenken wir, daß das Volumen des Wassers kleiner als jenes des Eises ist, so finden wir $\frac{\partial p}{\partial T}$ negativ. Das heißt, mit wachsendem Druck erniedrigt sich der Schmelzpunkt und umgekehrt. Wir können die Gleichung (53) auch anwenden, wenn sich ein Körper durch Temperaturerhöhung bezgl. Druckverminderung in seine chemischen Bestandteile zerlegt. Es ist dann p einfach der Dissoziationsdruck, r die Dissoziationswärme usw.

## § 48. Beziehung zwischen Druck und Temperatur eines Körpers.

Nehmen wir eine adiabatische Zustandsänderung durch Änderung des Drucks vor, so können wir die Gleichung (52) benützen, wenn wir $dQ = 0$ setzen. Es bleibt dann

$$\gamma \, dT = AT \frac{\partial v}{\partial T} dp .$$

Es ist nun $\frac{\partial v}{\partial T}$ nichts anderes als $v\delta$, wenn wir unter $\delta$ den Ausdehnungskoeffizienten des Körpers verstehen.

Wir können daher schreiben

$$\gamma \, dT = A T v \delta \, dp .$$

$\gamma$, A, T, v sind ihrer Natur nach positive Größen, $\delta$ kann jedoch sowohl positiv als auch, wie z. B. beim Wasser zwischen 0° und 4° C., negativ sein. Im ersteren Fall wird sich daher mit wachsendem Druck die Temperatur erhöhen, im andern jedoch erniedrigen.

## § 49. Temperaturänderung durch Dehnung.

Ein Stab von der Masse Eins und der Länge l wird durch ein angehängtes Gewicht P gedehnt. Führen wir dem Stab die Wärme dQ zu, so verlängert er sich um dl. Das Gewicht sinkt und leistet dabei die Arbeit P dl. Die Wärme wirkt also diesmal nicht einer äußeren Kraft entgegen, sondern im selben Sinn. Wir haben deshalb nach dem ersten Hauptsatz

$$dU = dQ + A P \, dl .$$

Die Wärmemenge Q werde als Funktion von T und P dargestellt. Es ist sonach

$$dQ = \gamma \, dT + \eta \, dP .$$

Benützen wir nun die Eigenschaft der vollständigen Differentiale dU und $\frac{dQ}{T}$ wie früher, indem wir

$$dl = \frac{\partial l}{\partial T} dT + \frac{\partial l}{\partial P} dP \tag{54}$$

setzen, so finden wir leicht

$$\eta = A T \frac{\partial l}{\partial T} ,$$

für eine adiabatische Dehnung erhalten wir somit

$$0 = \gamma \, dT + A T \frac{\partial l}{\partial T} dP .$$

$\gamma$ ist die spezifische Wärme bei konstantem Zug. $\frac{\partial l}{\partial T} = \lambda l$, wenn wir mit $\lambda$ den Ausdehnungskoeffizienten bezeichnen. Wir haben somit

$$dT = -\frac{AT\lambda l}{\gamma} dP .$$

Da in der Regel $\lambda$ positiv ist, so kühlt sich bei der Dehnung der Stab ab. Bei gespanntem Kautschuk ist $\lambda$ negativ. In der Tat erwärmt sich eine Kautschukschnur bei der Dehnung und kühlt sich mit abnehmender Spannung ab.

Aus Gleichung (54) erhalten wir

$$dP = \frac{dl - \frac{\partial l}{\partial T} dT}{\frac{\partial l}{\partial P}},$$

folglich

$$dQ = \gamma dT + \frac{\eta}{\frac{\partial l}{\partial P}}\left(dl - \frac{\partial l}{\partial T} dT\right).$$

Bei konstanter Länge wird $dl = 0$ und

$$dQ = \left(\gamma - \eta \frac{\frac{\partial l}{\partial T}}{\frac{\partial l}{\partial P}}\right) dT .$$

Es ist daher die spezifische Wärme bei konstanter Länge

$$\gamma' = \gamma - \eta \frac{\frac{\partial l}{\partial T}}{\frac{\partial l}{\partial P}} = \gamma - \frac{AT\left(\frac{\partial l}{\partial T}\right)^2}{\frac{\partial l}{\partial P}} = \gamma - AT\lambda^2 Elq ,$$

indem $\frac{\partial l}{\partial P} = \frac{l}{E q}$ (Bd. I § 86), wenn q der Querschnitt des Stabs und E der Elastizitätsmodul ist. Bei Metalldrähten und vielen anderen Körpern zeigt sich, daß das Produkt $A T \lambda^2 E l q$ so klein ist, daß man es in der Regel gegen $\gamma$ vernachlässigen, das Verhältnis der spezifischen Wärmen also gleich Eins setzen kann.

---

# Die kinetische Theorie der Gase.

## § 50. Die Wärmebewegung in Gasen.

D. Bernoulli, vorzüglich aber R. Clausius entwickelten eine Theorie, welche direkt eine Vorstellung jener Bewegung der kleinsten Teilchen gibt, die wir Wärme nennen. Vollständig entwickelt ist diese Hypothese für Gase, und man faßt die ganze Anschauungsweise unter dem Namen „mechanische“ oder „dynamische“, in der Regel aber „kinetische“ Theorie der Gase zusammen. Nach ihr stellt man sich im gasförmigen Zustand die Molekeln vollständig voneinander getrennt und in geradliniger Bewegung begriffen vor. „Die Bewegungsrichtungen sind für ein ruhendes Gas über die Gesamtheit der Gasmolekeln im Raum gleichmäßig verteilt, so daß sich nach jeder Richtung des Raums gleichviel Molekeln bewegen. Da man den Molekeln eine gewisse Ausdehnung zuschreiben muß, so sind natürlich Zusammenstöße derselben nicht ausgeschlossen. Damit aber der Zustand des Gases unverändert bleibt, ist erforderlich, daß die Molekeln infolge der Zusammenstöße weder in ihrer Durchschnittsgeschwindigkeit noch in ihrer Durchschnittsbewegungsrichtung eine Änderung

erfahren. Um dieser Bedingung Genüge zu tun, ist es am bequemsten, die Molekeln als vollkommen elastische Kugeln von gleicher Größe und gleicher Masse anzusehen. Für deren Zusammenstoß gilt dann das Gesetz von der Erhaltung der gemeinsamen Bewegungsgröße als auch der kinetischen Energie, und entsprechend dem Zustand vor dem Stoß ist auch nachher die Bewegung der Molekeln nach jeder Richtung des Raums gleich wahrscheinlich.

Es genügt in den meisten Fällen, und es vereinfacht die mathematische Behandlung bedeutend — tatsächlich wurde es anfangs von seiten der Forscher auch stets so gepflogen, und wir werden uns im folgenden ihnen darin anschließen —, wenn man allen Molekeln eine bestimmte Geschwindigkeit zuschreibt. Dies ist aber nur ein Mittelwert aus allen möglichen Geschwindigkeiten, welche nach einem bestimmten Gesetz über die Molekeln verteilt sein müssen."

## § 51. Boyle-Charlessches Gesetz.

Ein Gas, welches sich in keinem Gefäß befindet und keiner äußeren Kraft, wie etwa der Schwere, unterworfen ist, muß sich nach der kinetischen Theorie immer weiter zerstreuen. Befindet es sich aber in einem allseits geschlossenen Gefäß, so ist die Folge davon, daß von den Molekeln beständig Stöße auf die Gefäßwand ausgeübt werden. Indem diese wegen der großen Zahl der Molekeln sehr rasch aufeinander folgen, bewirken sie den Eindruck eines kontinuierlichen Druckes. Damit dieser, sowie der ganze Zustand des Gases konstant bleibt, ist es nötig, daß ebensoviel Molekeln von der Wand in das Gas zurückfliegen, als gegen die Wand stoßen. Es wird dies am leichtesten

erfüllt, wenn wir annehmen, die Gasmolekeln werden von der Wand nach den Reflexionsgesetzen zurückgeworfen, was ja bei vollkommen elastischen Kugeln und einer absolut starren Wand tatsächlich der Fall ist.

„Wirkt auf einen Körper eine Kraft, so ist das Maß derselben die Bewegungsgröße, welche in der Zeiteinheit auf den Körper übertragen wird. Stößt eine Molekel von der Masse m mit einer Geschwindigkeitskomponente u senkrecht gegen die Wand, so hat sie nach dem Stoß ebenfalls senkrecht gegen die Wand die Geschwindigkeit — u. Es muß also während des Stoßes auf die Molekel ein Gegendruck ausgeübt werden, welcher sie vollständig zur Ruhe bringt, ferner muß ein weiterer Gegendruck vorhanden sein, welcher ihr die Geschwindigkeit — u erteilt. Die Molekel empfängt also von der Wand die Bewegungsgröße 2 m u. Dieselbe Bewegungsgröße, nur entgegengesetzt gerichtet, hat aber auch die Wand nach dem Gesetz der Gleichheit von Wirkung und Gegenwirkung von der Molekel erhalten.“

Eine Molekel besitze die Geschwindigkeit c mit den Komponenten $\xi$, $\eta$, $\zeta$. Es ist also

$$\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = c^2 .$$

In der Volumeneinheit seien $N_1$ Molekeln vorhanden von der Geschwindigkeitskomponente $\xi$. Es werden daher $N_1 \xi$ solcher Molekeln gegen die Flächeneinheit einer Wand fliegen, welche senkrecht zur x-Achse steht. $N_1 \xi$ Stöße erhält davon die Wand in der Sekunde und

$$N_1 \xi \cdot 2 m \xi = 2 N_1 m \xi^2$$

ist daher die Bewegungsgröße, welche die Wand empfängt. Bilden wir die Summe über sämtliche Molekeln, so erhalten wir den Druck

$$p = \Sigma 2 N_1 m \xi^2 = \Sigma 2 N_1 m \eta^2 = \Sigma 2 N_1 m \zeta^2,$$

da wegen der gleichen Verteilung es ebensoviel gleich große $\eta$ und $\zeta$ als $\xi$ geben muß. Es ist demnach

$$p = \frac{\Sigma 2 N_1 m (\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2)}{3} = \frac{2 m c^2}{3} \Sigma N_1 .$$

Überlegen wir nun, daß die Hälfte der Molekeln positive, die andere negative $\xi$ usw. besitzt, so fliegen gegen die Wand, wenn N die Zahl sämtlicher Molekeln in der Volumeneinheit ist, $\frac{N}{2}$ Molekeln. Es ist daher

$\Sigma N_1 = \frac{N}{2}$, folglich

$$p = \frac{N m c^2}{3} . \tag{55}$$

Enthält unser Gefäß vom Volumen v n Molekeln, so ist $N = \frac{n}{v}$, folglich

$$p v = \frac{n m c^2}{3} . \tag{56}$$

Dies ist der Inbegriff des **Boyle-Charlesschen Gesetzes**, welches wir nach Gleichung (37) in der Form

$$p v = R T$$

kennen gelernt haben. Da für eine bestimmte Gasmenge die Zahl n der Molekeln, als auch die Masse m einer Molekel konstant ist, so muß $c^2$ proportional der absoluten Temperatur sein. $\frac{m c^2}{2}$ ist die kinetische Energie einer Molekel und $\frac{n m c^2}{2}$ jene des ganzen Gases. Das ist gleichzeitig die im **Gas enthaltene Wärmemenge.**

### § 52. Regel von Avogadro — Gesetze von Gay-Lussac und Dalton — Geschwindigkeit der Molekeln.

Es läßt sich zeigen, daß für Gase von gleicher Temperatur die lebendige Kraft der Molekeln gleich ist. Wir haben deshalb die Gleichung

$$\frac{m c^2}{2} = \frac{m_1 c_1^2}{2} = k,$$

wenn m und c dem einen, $m_1$ und $c_1$ dem andern Gas angehören. Stehen daher Gase von gleicher Temperatur auch unter demselben Druck, so muß

$$p = \frac{N m c^2}{3} = \frac{N_1 m_1 c_1^2}{3} = \ldots,$$

daher

$$N = N_1 = \ldots$$

sein. Gase unter gleichem Druck haben bei derselben Temperatur in gleichen Räumen gleichviel Molekeln. Es ist dies Avogadros Regel, welche hier als eine Folge der kinetischen Gastheorie erscheint.

Nach Gay-Lussac stehen zwei eine chemische Verbindung eingehende Gasmengen, bezogen auf gleichen Druck und gleiche Temperatur, untereinander sowie zur Menge der Verbindung in Verhältnissen, welche durch einfache ganze Zahlen dargestellt werden. Es folgt dies unmittelbar aus Avogadros Regel und Daltons Theorie, nach welcher die Molekeln einer chemischen Verbindung aus ganzen Zahlen von Atomen der sie bildenden Elemente bestehen.

Haben wir mehrere Gase in einem Gefäß, deren Molekelzahlen in der Volumeneinheit $N_1$, $N_2 \ldots$ sind, so ist die Gesamtzahl der Molekeln in der Volumeneinheit

$N = N_1 + N_2 + \ldots$ und der Druck

$$p = \tfrac{2}{3} N k = \tfrac{2}{3} N_1 k + \tfrac{2}{3} N_2 k + \ldots = p_1 + p_2 + \ldots,$$

wenn wir mit $p_1, p_2 \ldots$ die Drucke bezeichnen, welche die einzelnen Gase für sich im Gefäß erzeugen würden. Es ist der Gesamtdruck eines Gasgemenges gleich der Summe der Partialdrucke der einzelnen Gase, ein Gesetz, welches Dalton fand.

Setzen wir $N m = \varrho$, so haben wir unter $\varrho$ die Masse der Volumeinheit, d. i. die Dichte des Gases zu verstehen. Wir haben sonach $p = \frac{\varrho c^2}{3}$ oder

$$c^2 = \frac{3 p}{\varrho}.$$

Da aber Druck und Dichte eines Gases bestimmbar ist, so ist uns damit auch die Geschwindigkeit der Gasmolekeln gegeben. Wir finden so für Sauerstoff 461 m, Stickstoff 492 m, Wasserstoff 1844 m. Diese Zahlen gelten für die Temperatur des schmelzenden Eises, und sie wachsen proportional der Wurzel aus der absoluten Temperatur. Wir haben es sonach mit Geschwindigkeiten zu tun, welche jene der Geschosse unserer modernen Feuerwaffen zum Teil weit übertreffen.

## § 53. Abweichungen vom Boyle-Charlesschen Gesetz — Zustandsgleichung von van der Waals.

Nach dem Boyle-Charlesschen Gesetz muß mit wachsendem Druck das Volumen des Gases beständig kleiner werden, bis es bei unendlich hohen Drucken schließlich Null wird. Dasselbe müßte man auch bei endlichen Drucken erreichen, wenn die Temperatur bis zum absoluten Nullpunkt sinkt. Die Erfahrung lehrt

jedoch, daß man Gase nur bis zu einer gewissen Grenze komprimieren kann, wie groß man auch den Druck wählt. Wir erklären uns das so, daß wir uns die Molekeln nicht als Massenpunkte, sondern, wie wir bereits früher annahmen, als kleine vollkommen elastische Kugeln vorstellen. Ist nun das Gas so stark komprimiert, daß die Molekeln einander berühren, so füllen sie den ihnen zu Gebote stehenden Raum aus und lassen sich nicht weiter zusammendrücken. Das besagt, daß infolge des Volumens der Molekeln der Bewegung einer einzelnen nicht der ganze Gefäßraum zur Verfügung steht. Der Einfluß des Molekular-Volumens auf das Boyle-Charlessche Gesetz konnte bis jetzt strenge noch nicht ermittelt werden. Es genügt jedoch, für nicht zu hohe Drucke das Volumen v um eine konstante Größe b zu vermindern, welche sich als das vierfache Molekularvolumen ergibt. Das heißt: das Volumen, welches die Molekeln wirklich mit Materie ausfüllen, entspricht in seinem vierfachen Wert der Größe b. Die Zustandsgleichung verändert sich dadurch in

$$p(v-b) = \frac{n m c^2}{3}. \tag{57}$$

Wir müssen aber noch einen zweiten Einfluß in Rechnung ziehen. Bisher nahmen wir nämlich an, daß die Molekeln gar keine Kräfte aufeinander ausüben. Diese Annahme ist jedoch sehr willkürlich. Es liegt im Gegenteil nahe, den Molekeln Anziehungskräfte zuzuschreiben, da ja sonst ein Verflüssigen der Gase und ein Überführen in den festen Zustand bei abnehmender Temperatur kaum denkbar wäre. Wir haben von den Kräften anzunehmen, daß sie nur dann

wirksam sind, wenn die Molekeln einander sehr nahe kommen. Damit ist die Möglichkeit gegeben, daß bei einem Zusammentreffen von mehr als zwei Molekeln eine Konstellation eintritt, bei welcher zwei Molekeln dauernd zusammenbleiben und eine sogenannte Doppelmolekel bilden. Durch die Anziehungskräfte wird also die Gesamtzahl der sich als Einzelindividuen bewegenden Molekeln verringert, was nach Gleichung (56) einer Verminderung des Drucks gleichkommt. Auch diese Abweichung vom Boyle-Charlesschen Gesetz ist erfahrungsgemäß vom Volumen abhängig. Sie verschwindet bei sehr großer Verdünnung des Gases. Für diesen Fall haben wir also anzunehmen, daß nur einfache Molekeln vorhanden sind. Das gilt auch für sehr hohe Temperaturen, was ohne weiteres verständlich ist. Mit wachsender Temperatur nimmt die Energie der Molekeln zu und erschwert so die Vereinigung zu Doppelmolekeln. Die Zahl der Molekeln in einem verdünnten Gas von hoher Temperatur sei $n_0$. Verdichten wir es allmählich, so treten die Abweichungen auf, welche mit abnehmendem Volumen und sinkender Temperatur immer stärker ins Gewicht fallen. Wir werden daher die Zahl der jeweilig vorhandenen Molekeln durch

$$n = n_0 \left(1 - \frac{k}{v\,T}\right)$$

darstellen können. Wird v und T genügend groß, so kann $\frac{k}{v\,T}$ gegen Eins vernachlässigt werden, d. h. wir merken keine Abweichung vom Boyle-Charlesschen Gesetz, während mit abnehmendem v und T auch n, wie es die Erfahrung verlangt, immer kleiner wird.

Demnach erhalten wir aus Gleichung (57)

$$p(v-b)=\frac{n_0\,m\,c^2}{3}\left(1-\frac{k}{v\,T}\right).$$

Es ist zu bemerken, daß sowohl b gegen v als auch $\frac{k}{v\,T}$ gegen Eins klein sein muß, da wir sonst nicht so einfache Funktionen voraussetzen können. Es ist somit die Annahme

$$p=\frac{n_0\,m\,c^2}{3\,(v-b)}-\frac{k\,n_0\,m\,c^2}{3\,v^2\,T}$$

erlaubt, wobei wir höhere Glieder nicht in Betracht ziehen. $\frac{c^2}{T}$ ist eine konstante Größe; wir können daher

$$\frac{k\,n_0\,m\,c^2}{3\,T}=a$$

setzen und die Gleichung in die Form

$$\left(p+\frac{a}{v^2}\right)(v-b)=R\,T \tag{58}$$

bringen. Dies ist die Zustandsgleichung der Gase, welche zuerst von van der Waals, jedoch mittels anderer Erklärungsweise aufgestellt wurde. Sie ist um so wertvoller, als sie noch für viel höhere Drucke, als man nach der theoretischen Betrachtung glauben sollte, gültig ist, ja von van der Waals selbst auch für die Verflüssigung der Gase angewandt wurde. Sie zeichnet sich durch Einfachheit aus, da sie in die Zustandsgleichung idealer Gase nur die zwei neuen Konstanten a und b einführt.

## § 54. Kritische Temperatur — kritischer Druck — kritisches Volumen.

Wir können die Gleichung (58) in die Form

$$p v^3 - (p b + R T) v^2 + a v - a b = 0$$

bringen. Sie ist somit bezüglich des Volumens v eine Gleichung 3. Grads. Eine solche hat drei Wurzeln, von welchen entweder alle reell, oder eine reell und die beiden andern imaginär sein können. Wir veranschaulichen uns dies am besten durch die

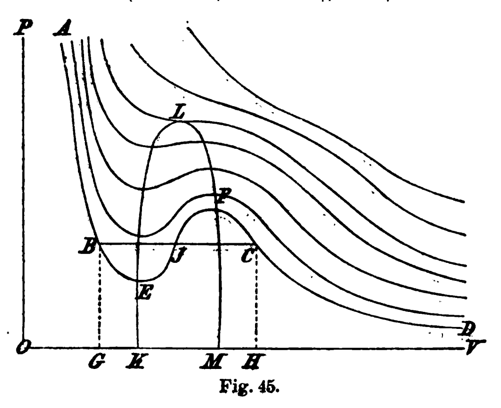



Fig. 45.

graphische Darstellung (Fig. 45), indem wir die Volumina als Abszissen, die Drucke als Ordinaten in ein rechtwinkliges Koordinatensystem eintragen. Tun wir das bei verschiedenen Temperaturen, so erhalten wir eine Schar von Isothermen. Bei tiefen Temperaturen, für welche die Kurven ein Minimum bei E und ein Maximum bei F haben, erhalten wir drei mögliche Werte des Volumens, wenn wir innerhalb des

Druckunterschieds EF eine zur v-Achse parallele Gerade ziehen. Diese schneidet die Kurve in drei Punkten, welche die drei Wurzeln der Gleichung ergeben. Es lassen sich aber nicht alle drei Wurzeln realisieren. Zwischen E und F haben wir nämlich einen labilen Zustand, indem bei wachsendem Druck auch das Volumen wachsen soll, was nicht ausführbar ist; sondern, wenn wir das Gas komprimieren, beginnt es sich beim Punkt C zu verflüssigen. Wir haben dann gleichzeitig zweierlei Zustände, den flüssigen und gasförmigen, und die Strecke BG = CH veranschaulicht den Druck des gesättigten Dampfes. Während wir also von C an das Volumen weiter verkleinern, bleibt der Druck konstant. Es verläuft die Volumsänderung längs der Geraden CB. In B ist aber nur noch Flüssigkeit vorhanden. Es muß dann für weitere Volumsverminderungen der Druck gleich beträchtlich steigen.

Es wäre verfehlt, nach dem Bisherigen zu glauben, daß das Stück BC der Kurve völlig wertlos sei. Bei der nötigen Vorsicht ist es möglich, den Punkt C zu passieren, ohne daß Verflüssigung eintritt. Wir haben dann einen übersättigten Dampf. Dasselbe geschieht beim umgekehrten Durchlaufen der Kurve im Punkt B. Wir sprechen dann von einer überhitzten Flüssigkeit.

Je höher die Temperatur wird, desto mehr nähern sich die Punkte B, J und C, bis sie schließlich zusammenfallen. Für diesen Punkt sind somit alle drei Wurzeln der Gleichung gleich groß. Steigern wir die Temperatur noch mehr, so erscheint nur noch eine reelle Wurzel. Die Temperatur der drei gleichen Wurzeln nennt man die kritische Temperatur.

Sie ist nämlich die Grenztemperatur, für welche die Verflüssigung eines Gases noch möglich ist. Gleicherweise nennen wir auch das Volumen und den Druck, welcher dem Punkt der drei gleichen Wurzeln entspricht, das kritische Volumen und den kritischen Druck.

Die Maxima und Minima der Kurven sind durch die Gleichung $\frac{dp}{dv} = 0$ gegeben. Nach Gleichung (58) haben wir also

$$p + \frac{a}{v^2} - \frac{2a(v-b)}{v^3} = 0 \,. \qquad (59)$$

Es ist das die Gleichung der Kurve KELFM, welche die Minima bezgl. Maxima der Isothermen verbindet. Sie hat wieder ein Maximum, welches gleichzeitig der kritische Punkt ist. Wir erhalten sonach das kritische Volumen $v_1$, wenn wir für Gleichung (59) $\frac{dp}{dv} = 0$ setzen. Dies ergibt

$$\frac{6a(v_1 - b)}{v_1^4} - \frac{4a}{v_1^3} = 0$$

daher $v_1 = 3b$.

Die Gleichungen (58) und (59) lassen jetzt mit Hilfe des Wertes $v_1$ auch den kritischen Druck

$$p_1 = \frac{a}{27b^2}$$

und die kritische Temperatur

$$T_1 = \frac{8a}{27bR}$$

ermitteln.

Machen wir die kritischen Werte zur Einheit, d. h. setzen wir

$$v = \omega v_1 = 3 b \omega ,$$

$$p = \pi p_1 = \frac{a}{27 b^2} \pi ,$$

$$T = \tau T_1 = \frac{8 a}{27 b R} \tau ,$$

so verwandelt sich die Zustandsgleichung in

$$\left(\pi + \frac{3}{\omega^2}\right) 3 \omega - 1) = 8 \tau .$$

Es haben alle Körper dieselben Isothermen, wenn wir als Maßeinheiten des Drucks, des Volumens und der Temperatur deren kritische Werte nehmen.

## § 55. Spannungs- und Ausdehnungskoeffizient.

Schreiben wir das Boyle-Charlessche Gesetz in der Form

$$p v = p_0 v_0 (1 + \alpha t) ,$$

so wird bei konstantem Volumen $v_0$

$$p = p_0 (1 + \alpha t) ,$$

und wir nennen $\alpha$ den Spannungskoeffizienten. Lassen wir hingegen den Druck konstant, so heißt analog in der Gleichung

$$v = v_0 (1 + \alpha t)$$

$\alpha$ der Ausdehnungskoeffizient. Für ideale Gase sind somit diese beiden Koeffizienten identisch, nicht aber für wirkliche Gase. Wir wollen daher den Spannungskoeffizienten mit $\alpha_p = \frac{p - p_0}{p_0 t}$, den Aus-

dehnungskoeffizienten mit $\alpha_v = \frac{v - v_0}{v_0 t}$ bezeichnen. Nach Gleichung (58) ist

$$\left(p + \frac{a}{v^2}\right)(v - b) = RT = R_1 (1 + \alpha t),$$

wenn wir $R_1 = 273 R$ setzen. Gleicherweise ist

$$\left(p_0 + \frac{a}{v^2}\right)(v - b) = R_1 .$$

Subtrahieren wir beide Gleichungen voneinander, so

$$(p - p_0)(v - b) = R_1 \alpha t = \left(p_0 + \frac{a}{p^2}\right)(v - b) \alpha t ,$$

daher

$$\alpha_p = \frac{p - p_0}{p_0 t} = \left(1 + \frac{a}{p_0 v^2}\right) \alpha .$$

Für ein bestimmtes Volumen ist also der Spannungskoeffizient eine konstante Größe, doch ist er immer größer als sein idealer Wert. Erst wenn das Volumen v groß wird, kann $\frac{a}{p_0 v^2}$ vernachlässigt werden und wir erhalten $\alpha_p = \alpha$. Der Umstand, daß für Wasserstoffgas a verschwindend klein ist, macht dieses Gas geeignet zur Bestimmung des idealen Spannungskoeffizienten $\alpha$.

Nicht so einfach wie der Spannungskoeffizient läßt sich der Ausdehnungskoeffizient $\alpha_v$ finden. Wir müßten zu diesem Zweck v und $v_0$ aus Gleichungen vom 3. Grad bestimmen und würden so zu sehr komplizierten, unübersichtlichen Ausdrücken kommen. Für bestimmte Grenzen der Temperatur und des Drucks lassen sich jedoch Vereinfachungen einführen, so daß die Aus-

drücke handlicher werden. Für Wasserstoff z. B. wird, da $a = 0$ gesetzt werden kann,

$$\alpha_v = \left(1 - \frac{b}{v_0}\right)\alpha ,$$

mithin $\alpha_v < \alpha_p$. Bei anderen Gasen findet das Gegenteil statt.

## § 56. Spezifische Wärme.

Die in einem Gas enthaltene Wärmemenge ist die gesamte kinetische Energie der Molekeln. Wir betrachten die Masseneinheit des Gases, für welche $n m = 1$ ist. Sonach wird nach Gleichung (56)

$$p v = \frac{c^2}{3}$$

und die im Gas enthaltene kinetische Energie

$$\frac{c^2}{2} = \tfrac{3}{2} p v .$$

Bekanntlich ist

$$c^2 = c_0^2 (1 + \alpha t) ,$$

daher $\frac{c_0^2 \alpha}{2}$ die Zunahme der gesamten Energie des Gases bei einer Temperaturerhöhung um $1^0$ C. Lassen wir dabei keine Volumsänderung eintreten, so ist

$$\gamma = \frac{c_0^2 \alpha}{2} A$$

die spezifische Wärme bei konstantem Volumen, wenn A das kalorische Äquivalent der Arbeit ist. Bei konstantem Druck gilt für das Gas

$$v = v_0 (1 + \alpha t) .$$

Die Zunahme für einen Grad ist $v_0 \alpha$, wobei die äußere

Arbeit $p v_0 \alpha$ zu leisten ist. Das entspricht der Wärmemenge $A p v_0 \alpha$. Um diesen Wert ist also die spezifische Wärme bei konstantem Druck $\Gamma$ größer als jene bei konstantem Volumen. Es ist somit

$$\Gamma = \frac{A c_0^2 \alpha}{2} + A p v_0 \alpha = \frac{A c_0^2 \alpha}{2} + \frac{A c_0^2 \alpha}{3}$$

$$= \tfrac{5}{3} A \alpha \frac{c_0^2}{2}$$

und

$$\frac{\Gamma}{\gamma} = \tfrac{5}{3}.$$

In Wirklichkeit ist aber nur für wenige Gase, die sogenannten einatomigen, wie z. B. für Quecksilberdampf, Argon, Krypton, Xenon, das Verhältnis der spezifischen Wärmen $\frac{5}{3}$. Das rührt davon her, daß wir bei den meisten Gasen die Molekeln nicht als Kugeln von vollkommen glatter Oberfläche auffassen dürfen, sondern als kompliziertere Gebilde. Demzufolge besitzen sie nicht nur eine fortschreitende Bewegung, sondern auch eine drehende, sowie eine innere Bewegung, wie z. B. Schwingungen der die Molekeln bildenden Atome. Wir haben daher einen Unterschied zwischen der Gesamtenergie H und der Energie der fortschreitenden Bewegung K der Molekeln zu machen. Für die Masseneinheit des Gases ist

$$K = A \frac{c_0^2}{2},$$

hingegen

$$H = A \frac{c_0^2}{2} + k,$$

wobei k von jenem Teil der Energie herrührt, der nicht in der fortschreitenden Bewegung liegt. Ferner ist

$$\Gamma = \gamma + A p v_0 \alpha = \tfrac{5}{3} \frac{A \alpha c_0^2}{2} + k \alpha ,$$

indem wir $\gamma = A \alpha \frac{c_0^2}{2} + k$ setzen müssen.

Aus diesen Gleichungen findet man leicht

$$\frac{\Gamma}{\gamma} = 1 + \tfrac{2}{3} \frac{K}{H} .$$

Überlegen wir, daß $\frac{K}{H}$ zwischen Null und Eins liegen muß, so folgt

$$1 < \frac{\Gamma}{\gamma} < \tfrac{5}{3} ,$$

was sich ausnahmslos in der Erfahrung bestätigt.

### § 57. Stoßzahl und mittlere Weglänge der Molekeln.

Wir betrachten die Molekeln als kleine Kugeln vom Durchmesser $\sigma$. Alle sind nach den verschiedensten Richtungen des Raums in geradliniger Bewegung begriffen. Es muß sich folglich ereignen, daß eine Molekel mit anderen zusammenstößt. Die Zahl der Zusammenstöße, welche eine Molekel in der Sekunde erfährt, wollen wir berechnen. Wir denken uns zu dem Zweck erst alle Molekeln in Ruhe bis auf eine, welche sich mit der Geschwindigkeit c bewegt. Stößt sie mit einer anderen zusammen, so ist die Entfernung der Mittelpunkte beider gleich dem Durchmesser $\sigma$ einer Molekel. Wir werden also denselben Effekt erreichen, wenn wir uns die ruhende Molekel als Punkt, hingegen die sich bewegende als eine Kugel vom Radius $\sigma$ denken

Eine solche Kugel hinterläßt als Spur einen Zylinder vom Querschnitt $\pi\sigma^2$ und der Länge c per Sekunde. In der Sekunde fegt unsere Kugel also einen Raum $\pi\sigma^2 c$ ab. In diesem Raum befinden sich $N\pi\sigma^2 c$ Gasmolekeln, falls N die Zahl der Molekeln in der Volumeneinheit ist.

$$Z = N\pi\sigma^2 c$$

ist daher die Zahl der Zusammenstöße, welche die wandernde Molekel erfährt.

Dieselbe Betrachtungsweise können wir für den Fall festhalten, daß alle Molekeln in Bewegung sind; nur haben wir dann anstatt c die mittlere relative Geschwindigkeit r einzusetzen, welche eine Molekel gegenüber den andern hat. Bilden die Bewegungsrichtungen zweier Molekeln den Winkel $\vartheta$ (Fig. 46), so ist die relative Geschwindigkeit r gegeben durch

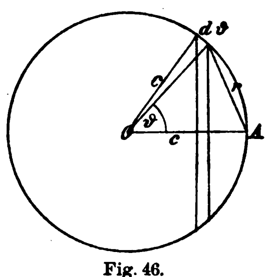


Fig. 46.

$$r^2 = c^2 + c^2 - 2c^2\cos\vartheta = 2c^2(1 - \cos\vartheta).$$

Die Zahl sämtlicher Geschwindigkeiten sei N. Sie verteilen sich gleichmäßig nach allen Richtungen des Raums. Wir können sie uns zum Zweck der Rechnung als Radien einer Kugel vorstellen, welche gleichmäßig verteilt die Kugeloberfläche treffen. Auf die Flächeneinheit der Kugel gehen demnach $\frac{N}{4\pi c^2}$ solcher Radien. Auf einer Kugelzone $2\pi c^2 \sin\vartheta\, d\vartheta$ liegen die Geschwindigkeiten, welche mit der Richtung OA den Winkel $\vartheta$ einschließen. Ihre Zahl ist

$$\frac{2\pi N c^2 \sin\vartheta\, d\vartheta}{4\pi c^2} = \frac{N}{2}\sin\vartheta\, d\vartheta$$

und ihre Gesamtsumme

$$\frac{N}{2}\sin\vartheta\, d\vartheta\sqrt{2\,c^2(1-\cos\vartheta)} = c\,N\sin\vartheta\, d\vartheta\sqrt{\frac{1-\cos\vartheta}{2}}$$

$$= c\,N\sin\vartheta\sin\frac{\vartheta}{2}\,d\vartheta = 4\,c\,N\sin^2\frac{\vartheta}{2}\cos\frac{\vartheta}{2}\,d\frac{\vartheta}{2}$$

Bilden wir nun durch Integration die Summe über die ganze Kugelfläche und dividieren wir durch die Gesamtzahl N der Geschwindigkeiten, so erhalten wir die mittlere relative Geschwindigkeit. Diese ist somit

$$r = 4\,c\int_0^\pi \sin^2\frac{\vartheta}{2}\cos\frac{\vartheta}{2}\,d\frac{\vartheta}{2} = 4\,c\left[\frac{\sin^3\frac{\vartheta}{2}}{3}\right]_0^\pi = \frac{4\,c}{3}.$$

Es ist demnach die Zahl der Zusammenstöße einer Molekel in der Sekunde

$$Z = \tfrac{4}{3}\,N\pi\sigma^2 c\,.$$

Dividieren wir den Weg c, welchen die Molekel in der Sekunde zurücklegt, durch die Zahl der Zusammenstöße, so erhalten wir die mittlere Weglänge, d. i. den Weg, welchen die Molekel im Durchschnitt zwischen zwei Zusammenstößen zurücklegt,

$$\lambda = \frac{3}{4\,N\pi\sigma^2}\,.$$

## § 58. Innere Reibung.

Bewegen sich zwei einander berührende parallele Gasschichten mit verschiedener Geschwindigkeit, so übt die schnellere auf die langsamere eine Beschleunigung, diese auf jene eine Verzögerung aus. Es wird somit

Bewegungsgröße von der schnelleren an die langsamere Schichte abgegeben, u. z. wird durch die Flächeneinheit der Schichte die Bewegungsgröße

$$R = -\eta \frac{du}{dz} \tag{60}$$

per Sekunde getragen. Das heißt, R ist die Kraft, welche die schnellere Schichte auf die Flächeneinheit der langsameren ausübt. Wir bezeichnen diese Kraft mit dem Namen „innere Reibung“ (siehe Bd. I § 64). $\eta$ nennen wir den Reibungskoeffizienten, $\frac{du}{dz}$ ist das Geschwindigkeitsgefälle senkrecht zur Bewegungsrichtung der Gasschichte. Verstehen wir unter z die eine der Koordinaten eines rechtwinkligen Koordinatensystems, so bewegen sich die Schichten parallel zur xy-Ebene. Den Vorgang der inneren Reibung der Gase nach der kinetischen Theorie zu erklären, läuft also darauf hinaus, die Möglichkeit des Transports von Bewegungsgröße parallel zur z-Achse nachzuweisen.

Die Bewegungsrichtung der Gasschichten sei parallel zur x-Achse. In der Volumeneinheit des Gases seien n Molekeln von der Geschwindigkeit $\xi'$ parallel zur x-Achse und $\zeta$ parallel zur z-Achse. Durch die Flächeneinheit der xy-Ebene wird sonach in der Sekunde die Bewegungsgröße

$$R = \Sigma n m \xi' \zeta$$

getragen, wobei sich die Summe über alle möglichen Werte von $\xi'$ und $\zeta$ erstreckt. Die Molekeln, welche die xy-Ebene mit der Geschwindigkeit $\zeta$ passieren, kommen aus verschiedenen Schichten. Die aus der Schichte mit der Ordinate z stammen, haben die Geschwindigkeit

$$\xi' = \xi + u + \frac{du}{dz} z,$$

wobei sich $\xi$ auf die Wärmebewegung, $u + \frac{du}{dz} z$ auf die Bewegung der Schichte als Ganzes bezieht. Es ist somit u die Geschwindigkeit der Schichte in der xy-Ebene. Für die Reibung haben wir also

$$R = \Sigma n m \left(\xi + u + \frac{du}{dz} z\right) \zeta .$$

Die Summen $\Sigma n m \xi \zeta$ und $\Sigma n m u \zeta$ verschwinden wegen der gleich großen Anzahl positiver und negativer $\xi$ und $\zeta$. Es bleibt also nur

$$R = \frac{du}{dz} \Sigma n m \zeta z,$$

wobei wir $\frac{du}{dz}$ als konstant ansehen. Ist der Weg, welchen die Molekel nach ihrem letzten Zusammenstoß in m (Fig. 47) bis zum Passieren der xy-Ebene zurücklegt, r, so besteht die Proportion

$$\zeta : c = - z . r,$$

daher

$$z = - \frac{\zeta r}{c} .$$

Danach können wir schreiben

$$R = - \frac{1}{c} \frac{du}{dz} \Sigma n m \zeta^2 r .$$

Der Mittelwert von r ist aber für alle $\zeta$ eine konstante Größe und zwar gleich der mittleren Weglänge $\lambda$, weshalb

$$R = - \frac{\lambda}{c} \frac{du}{dz} \Sigma n m \zeta^2$$

gesetzt werden kann. Nun ist

$$\Sigma \mathrm{n\,m}\,\zeta^2 = \mathrm{p}$$

gleich dem Druck des Gases, so daß wir leicht nach Gleichung (60) für die *Größe des Reibungskoeffizienten*

$$\eta = \frac{\mathrm{p}\lambda}{\mathrm{c}} = \frac{\mathrm{N\,m\,c}\,\lambda}{3} \qquad (61)$$

erhalten, wenn wir den Wert von p aus Gleichung (55) benützen.

Führen wir in Gleichung (61) den Wert der mittleren Weglänge

$$\lambda = \frac{3}{4\,\mathrm{N}\,\pi\,\sigma^2}$$

ein, so ergibt dies

Fig. 47.

$$\eta = \frac{\mathrm{m\,c}}{4\,\pi\,\sigma^2}\,.$$

Die rechte Seite dieser Gleichung ist frei von der Zahl der Molekeln in der Volumeneinheit, d. h. *die innere Reibung eines Gases ist von dessen Dichte oder*, was dasselbe ist, *vom Druck unabhängig*. Dieses überraschende von *Maxwell* gefundene Resultat bestätigt sich tatsächlich innerhalb sehr großer Druckgrenzen.

Aber noch einen anderen merkwürdigen Aufschluß gewährt uns die Theorie der inneren Reibung. Wir wissen, daß $\mathrm{N\,m} = \varrho$ die Dichte des Gases ist, somit finden wir nach Gleichung (61)

$$\lambda = \frac{3\,\eta}{\varrho\,\mathrm{c}}\,.$$

Die Geschwindigkeit der Molekeln ist uns bereits bekannt (§ 52), der Reibungskoeffizient und die Dichte

sind experimentell bestimmbare Größen. Wir können somit den Zahlenwert der mittleren Weglänge angeben und damit auch die Stoßzahl einer Molekel. So finden wir für

| | Weglänge | Stoßzahl |
|---|---|---|
| Wasserstoff | 0 0000 1855 cm | 9480 Millionen. |
| Sauerstoff | 1059 „ | 4065 „ |
| Stickstoff | 959 „ | 4735 „ |
| Kohlensäure | 680 „ | 5510 „ |

Es beziehen sich diese Zahlen auf den Druck einer Atmosphäre und die Temperatur 0° C.

## § 59. Wärmeleitung.

Haben wir parallel zur z-Achse eines rechtwinkligen Koordinatensystems ein Temperaturgefälle $\frac{dT}{dz}$, so fließt beständig von oben nach unten Wärme durch die xy-Ebene. Für die Flächen- und Zeiteinheit ist diese Wärmemenge

$$W = -k\frac{dT}{dz},$$

wenn wir k die Wärmeleitungsfähigkeit nennen. Nach unserer Auffassung ist nun W nichts anderes als eine Energiemenge, welche von oben nach unten getragen wird, und wir können deren Größe genau so finden, wie den Wert der transportierten Bewegungsgröße im vorhergehenden Paragraphen. Es trägt jede passierende Molekel durch die xy-Ebene die Wärmemenge $m\gamma\left(T_0 + \frac{dT}{dz}z\right)$, indem m die Masse einer Molekel, $\gamma$ die spezifische Wärme bei konstantem Volumen und z die Höhe jener Schichte bedeutet, aus welcher die Molekel

kommt. Dabei haben wir vorausgesetzt, daß die Temperatur

$$T = T_0 + \frac{dT}{dz} z$$

sei. $T_0$ ist also die Temperatur in der xy-Ebene. Wir brauchen somit in den Formeln für die innere Reibung nur m durch $m\gamma$ und u durch T zu ersetzen und haben unmittelbar die Formel für die Wärmeleitung

$$k = \frac{c N \dot{m} \lambda \gamma}{3} = \frac{\varrho c \lambda \gamma}{3}.$$

Es besteht demnach zwischen dem Reibungskoeffizienten und der Wärmeleitungsfähigkeit die enge Beziehung

$$k = \eta \gamma .$$

Ferner folgt, daß auch die Wärmeleitungsfähigkeit vom Druck des Gases unabhängig ist, und schließlich haben wir auch in der Wärmeleitung ein Mittel, den Zahlenwert der mittleren Weglänge kennen zu lernen.

## § 60. Größe der Molekeln.

Komprimieren wir ein Gas durch sehr große Druckkräfte auf das kleinste mögliche Volumen, so können wir annehmen, daß die Molekeln den Raum V, der ihnen zur Verfügung steht, völlig mit Materie ausfüllen. Ist das ursprüngliche Volumen Eins, die darin enthaltene Molekelzahl N, so wird, da $\frac{4}{3} N \pi \sigma^3$ das achtfache Molekularvolumen ist,

$$V = \frac{1}{6} N \pi \sigma^3 .$$

Diese Gleichung erlaubt mit Hilfe des Werts der mittleren Weglänge

$$\lambda = \frac{3}{4 N \pi \sigma^2}$$

den Durchmesser einer Molekel

$$\sigma = 8 V \lambda$$

zu finden. Dieses überraschende Resultat verdanken wir Loschmidt. Er fand auf diesem Weg für

| | $\sigma$ |
|---|---|
| Wasser . . . . | $44.10^{-9}$ cm |
| Kohlensäure . . . | 114 . „ |

## Für ausgedehntere Studien der optischen Erscheinungen sind folgende Werke zu erwähnen:

V. v. Lang: Einleitung in die theoretische Physik. 2. Aufl. Braunschweig 1891.

A. Beer: Einleitung in die höhere Optik. 2. Aufl. Bearbeitet von V. v. Lang. Braunschweig 1882.

E. Verdet: Vorlesungen über die Wellentheorie des Lichtes. Deutsche Bearbeitung von K. Exner. Braunschweig 1881.

F. Neumann: Vorlesungen über theoretische Optik. Herausgegeben von E. Dorn. Leipzig 1885.

H. Poincaré: Mathematische Theorie des Lichtes. Deutsch von E. Gamlich und W. Jäger. Berlin 1894.

## Für tiefere Studien in der Wärmelehre und kinetischen Gastheorie sind folgende Werke zu nennen:

V. v. Lang: Einleitung in die theoretische Physik. 2. Aufl. Braunschweig 1891.

C. Christiansen: Elemente der theoretischen Physik. Leipzig 1903.

B. Riemann: Partielle Differentialgleichungen, angewendet auf physikalische Fragen. Herausgegeben von Hattendorf. Braunschweig 1876.

R. Clausius: Die mechanische Wärmetheorie. Braunschweig 1876.

— — Die kinetische Theorie der Gase. Herausgegeben von M. Planck und C. Pulfrich. Braunschweig 1889 bis 1891.

H. Poincaré: Thermodynamik. Deutsch von W. Jäger und E. Gamlich. Berlin 1893.

O. E. Meyer: Die kinetische Theorie der Gase. 2. Auflage. Breslau 1895.

L. Boltzmann: Vorlesungen über Gastheorie. Leipzig 1895 und 1898.

J D. van der Waals: Die Kontinuität des gasförmigen und flüssigen Zustandes. 2. Aufl. Leipzig 1899.

---

# Geschichte der Physik

Von

**A. Kistner,**

Professor an der Großherzogl. Realschule zu Sinsheim a. E.

**Band I.** Die Physik bis Newton. Mit 13 Fig.

**Band II.** Die Physik von Newton bis zur Gegenwart. Mit 4 Fig.

Preis: in Leinwand gebunden je 80 Pfennige.

(Sammlung Göschen Nr. 293 und 294.)

---

Die Ausarbeitung der vorliegenden Geschichte der Physik geschah in der Hauptsache nach folgenden Gesichtspunkten: Die Entwicklung der physikalischen Wissenschaft von den ältesten Zeiten bis in die Gegenwart wird unter steter Berücksichtigung aller Grenzgebiete behandelt. Das Werden der vorwiegend mathematischen Physik liegt außerhalb des gegebenen Rahmens und wird nur gelegentlich in den Hauptsachen kurz gestreift. Es sollen eben nur Kenntnisse vorausgesetzt sein, die das Maß der durch unsere höheren realistischen Unterrichtsanstalten vermittelten, nicht wesentlich überschreiten. Es wurde darauf gesehen, eine vollkommen zuverlässige, klare, möglichst anschauliche Darstellung zu geben, weshalb an geeigneten Stellen Stücke aus Originalabhandlungen, Briefen usw. eingeschaltet sind. Bei den Forschern wird, soweit überhaupt bekannt, das Geburts- und Todesjahr nach den besten Quellen angegeben. Für die Zahlen bei neugefundenen Tatsachen war meistens das Jahr der Veröffentlichung, Patenterteilung usw. maßgebend. Soweit es möglich war, das Jahr einer Erfindung, Entdeckung oder Neukonstruktion irgendwie zu ermitteln, wurde natürlich dieses angeführt.

Die Schrift soll besonders dem Lehrer, Techniker, Studenten usw. schnell und sicher die gewünschten Aufschlüsse geben und, was besonders für den Unterricht von hoher Bedeutung ist, zeigen, wie sich das heutige Gebäude der Physik gebildet hat. Selbst unsere besseren Lehrbücher der Physik, die diesen Bedürfnissen durch kurze Notizen Rechnung tragen wollen, bieten leider nur zu häufig falsche oder wenigstens recht ungenaue Angaben.

---

G. J. Göschen'sche Verlagshandlung in Leipzig.

# Verzeichnis der bis jetzt erschienenen Bände.

**Aufsatzentwürfe** von Oberstudienrat Dr. L. W. Straub, Rektor des Eberhard-Ludwigs-Gymnasiums in Stuttgart. Nr. 17.

**Ausgleichungsrechnung nach der Methode der kleinsten Quadrate** von Wilh. Weitbrecht, Prof. der Geodäsie in Stuttgart. Mit 15 Figuren und 2 Tafeln. Nr 302.

**Bade- und Schwimmanstalten, Oeffentliche**, von Dr. Karl Wolff, Stadt-Oberbaurat in Hannover. Mit 50 Fig. Nr. 380.

**Baukunst, Die, des Abendlandes** von Dr. K. Schäfer, Assistent am Gewerbemuseum in Bremen. Mit 22 Abbild. Nr. 74.

**Betriebskraft, Die zweckmäßigste,** von Friedrich Barth, Oberingenieur in Nürnberg. 1. Teil: Die mit Dampf betriebenen Motoren nebst 22 Tabellen über ihre Anschaffungs- u. Betriebskosten. M 14 Abb. Nr. 224.

— — 2. Teil: Verschiedene Motoren nebst 22 Tabellen über ihre Anschaffungs- und Betriebskosten. Mit 29 Abbild. Nr. 225.

**Bewegungsspiele** von Dr. E. Kohlrausch, Prof. am Kgl. Kaiser Wilhelms-Gymnasium zu Hannover. Mit 15 Abbild. Nr. 96.

**Biologie der Pflanzen** von Dr. W. Migula, Prof. an der Forstakademie Eisenach. Mit 50 Abbild. Nr. 127.

**Biologie der Tiere, Abriß der,** von Dr. Heinr. Simroth, Prof. an der Universität Leipzig. Nr. 131.

**Bleicherei** siehe: Textil-Industrie III.

**Brauereiwesen I:** Mälzerei von Dr. Paul Dreverhoff, Direktor d. Brauer- u. Mälzerschule zu Grimma. Mit 16 Abbild. Nr. 303.

**Buchführung** in einfachen und doppelten Posten von Rob. Stern, Oberlehrer der Öffentl. Handelslehranst. u. Doz. d. Handelshochschule z. Leipzig. Mit vielen Formularen. Nr. 115.

**Buddha** von Prof. Dr. Edmund Hardy. Nr. 174.

**Burgenkunde, Abriß der,** von Hofrat Dr. Otto Piper in München. Mit 30 Abbild. Nr. 119.

**Chemie, Allgemeine und physikalische,** von Dr. Max Rudolphi, Prof. a. d. Techn. Hochschule in Darmstadt. Mit 22 Fig. Nr. 71.

**Chemie, Analytische,** von Dr. Johannes Hoppe. I: Theorie und Gang der Analyse. Nr. 247.

— — II: Reaktion der Metalloide und Metalle. Nr. 248.

— **Anorganische,** von Dr. Jos. Klein in Mannheim. Nr. 37.

— — siehe auch: Metalle. — Metalloide.

**Chemie, Geschichte der,** von Dr. Hugo Bauer, Assistent am chem. Laboratorium der Kgl. Technischen Hochschule Stuttgart. I: Von den ältesten Zeiten bis zur Verbrennungstheorie von Lavoisier. Nr. 264.

— II: Von Lavoisier bis zur Gegenwart. Nr. 265.

— **der Kohlenstoffverbindungen** von Dr. Hugo Bauer, Assistent am chem. Laboratorium der Kgl. Techn. Hochschule Stuttgart. I. II: Aliphatische Verbindungen. 2 Teile. Nr. 191. 192.

— — III: Karbocyklische Verbindungen. Nr. 193.

— — IV: Heterocyklische Verbindungen. Nr. 194.

— **Organische,** von Dr. Jos. Klein in Mannheim. Nr. 38.

— **Physiologische,** von Dr. med. A. Legahn in Berlin. I: Assimilation. Mit 2 Tafeln. Nr. 240.

— — II: Dissimilation. Mit einer Tafel. Nr. 241.

**Chemisch-Technische Analyse** von Dr. G. Lunge, Prof. an der Eidgenöss. Polytechn. Schule in Zürich. Mit 16 Abbild. Nr. 195.

**Christentum.** Die Entwicklung des Christentums innerhalb des Neuen Testaments. Von Prof. Dr. Lic. Carl Clemen. Nr. 388.

**Dampfkessel, Die.** Kurzgefaßtes Lehrbuch mit Beispielen für das Selbststudium u. d. praktischen Gebrauch von Friedrich Barth, Oberingenieur in Nürnberg. Mit 67 Fig. Nr. 9.

**Dampfmaschine, Die.** Kurzgefaßtes Lehrbuch m. Beispielen für das Selbststudium und den prakt. Gebrauch von Friedrich Barth, Oberingenieur in Nürnberg. Mit 67 Fig. Nr. 8.

**Dampfturbinen, Die,** ihre Wirkungsweise und Konstruktion von Ingenieur Hermann Wilda, Oberlehrer am staatl. Technikum in Bremen. Mit 104 Abbild. Nr. 274.

**Dichtungen a. mittelhochdeutscher Frühzeit.** In Auswahl m. Einltg. u. Wörterb. herausgegeb. v. Dr. Herm. Jantzen, Direktor der Königin Luise-Schule in Königsberg i. Pr. Nr. 137.

**Dietrichepen.** Kudrun u. Dietrichepen. Mit Einleitung und Wörterbuch von Dr. O. L. Jiriczek, Prof. an der Univers. Münster. Nr. 10.

**Differentialrechnung** von Dr. Frdr. Junker, Prof. a. Karlsgymnasium in Stuttgart. Mit 68 Fig. Nr. 87.

— Repetitorium u. Aufgabensammlung z. Differentialrechnung von Dr. Frdr. Junker, Prof. am Karlsgymnasium in Stuttgart. Mit 46 Fig. Nr. 146.

**Eddalieder** mit Grammatik, Übersetzung und Erläuterungen von Dr. Wilhelm Ranisch, Gymnasial-Oberlehrer in Osnabrück. Nr. 171.

**Eisenbetonbau, Der,** von Reg.-Baumeister Karl Rößle. Mit 75 Abbildungen. Nr. 349.

**Eisenhüttenkunde** von A. Krauß, dipl. Hütteningen. I. Teil: Das Roheisen. Mit 17 Fig. u. 4 Tafeln. Nr. 152.

— II. Teil: Das Schmiedeisen. Mit 25 Figuren und 5 Tafeln. Nr. 153.

**Eisenkonstruktionen im Hochbau** von Ingenieur Karl Schindler in Meißen. Mit 115 Fig. Nr. 322.

**Elektrizität.** Theoret. Physik III. Teil: Elektrizität u. Magnetismus. Von Dr. Gust. Jäger, Prof. a. d. Univers. Wien. Mit 33 Abbildgn. Nr. 78.

**Elektrochemie** von Dr. Heinr. Danneel in Friedrichshagen. I. Teil: Theoretische Elektrochemie und ihre physikalisch-chemischen Grundlagen. Mit 18 Fig. Nr. 252.

— — II. Teil: Experimentelle Elektrochemie, Meßmethoden, Leitfähigkeit, Lösungen. Mit 26 Fig. Nr. 253.

**Elektrotechnik.** Einführung in die moderne Gleich- und Wechselstromtechnik von J. Herrmann, Professor der Elektrotechnik an der Kgl. Techn. Hochschule Stuttgart. I: Die physikalischen Grundlagen. M. 47 Fig. Nr. 196.

— — II: Die Gleichstromtechnik. Mit 74 Fig. Nr. 197

— — III: Die Wechselstromtechnik. Mit 109 Fig. Nr. 198.

**Entwicklung, Die, der sozialen Frage** von Prof. Dr. Ferdinand Tönnies. Nr. 353.

**Entwicklung, Die, des Christentums** siehe: Christentum.

— **der Handfeuerwaffen** siehe: Handfeuerwaffen.

**Entwicklungsgeschichte der Tiere** von Dr. Johannes Meisenheimer, Prof. der Zoologie an der Universität Marburg. I: Furchung, Primitivanlagen, Larven, Formbildung, Embryonalhüllen. Mit 48 Fig. Nr. 378.

— — II: Organbildung. Mit 46 Fig. Nr. 379.

**Epigonen, Die, des höfischen Epos.** Auswahl aus deutschen Dichtungen des 13. Jahrhunderts von Dr. Viktor Junk, Aktuarius der Kaiserlichen Akademie der Wissenschaften in Wien. Nr. 289.

**Erdmagnetismus, Erdstrom, Polarlicht** von Dr. A. Nippoldt jr., Mitglied des Königl. Preußischen Meteorologischen Instituts zu Potsdam. Mit 14 Abbild. und 3 Taf. Nr. 175.

**Ethik** von Professor Dr. Thomas Achelis in Bremen. Nr. 90.

**Exkursionsflora von Deutschland** zum Bestimmen der häufigeren in Deutschland wildwachsenden Pflanzen von Dr. W. Migula, Professor an der Forstakademie Eisenach. 1. Teil. Mit 50 Abbild. Nr. 268.

— — 2. Teil. Mit 50 Abbild. Nr. 269.

**Explosivstoffe.** Einführung in die Chemie der explosiven Vorgänge von Dr. H. Brunswig in Neubabelsberg. Mit 6 Abbild. u. 12 Tab. Nr. 333.

**Familienrecht.** Recht des Bürgerlichen Gesetzbuches. Viertes Buch: Familienrecht von Dr. Heinrich Titze, Prof. a. d. Univ. Göttingen. Nr. 305.

**Färberei** siehe: Textil-Industrie III.

**Feldgeschütz, Das moderne,** I: Die Entwicklung des Feldgeschützes seit Einführung des gezogenen Infanteriegewehrs bis einschließlich der Erfindung des rauchlosen Pulvers, etwa 1850 bis 1890, von Oberstleutnant W. Heydenreich, Militärlehrer an der Militärtechn. Akademie in Berlin. Mit 1 Abbild. Nr. 306.

**Feldgeschütz, Das moderne,** II: Die Entwicklung des heutigen Feldgeschützes auf Grund der Erfindung des rauchlosen Pulvers, etwa 1890 bis zur Gegenwart, von Oberstleutnant W. Heydenreich, Militärlehrer an der Militärtechn. Akademie in Berlin. Mit 11 Abbild. Nr. 307.

**Fernsprechwesen, Das,** von Dr. Ludwig Rellstab in Berlin. Mit 47 Fig. und 1 Tafel. Nr. 155.

**Festigkeitslehre** von W. Hauber, Diplom-Ingenieur. M. 56 Fig. Nr 288.

**Fette, Die, und Oele** sowie die Seifen- u. Kerzenfabrikation und die Harze, Lacke, Firnisse mit ihren wichtigsten Hilfsstoffen von Dr. Karl Braun in Berlin. I: Einführung in die Chemie, Besprechung einiger Salze und die Fette und Öle. Nr. 335.

— — II: Die Seifenfabrikation, die Seifenanalyse und die Kerzenfabrikation. Mit 25 Abbild. Nr. 336.

— — III: Harze, Lacke, Firnisse. Nr. 337.

**Filzfabrikation** siehe: Textil-Industrie II.

**Finanzwissenschaft** v. Präsident Dr. R. van der Borght in Berlin. I: Allgemeiner Teil. Nr. 148.

— — II: Besonderer Teil (Steuerlehre). Nr. 391.

**Firnisse** siehe: Fette und Öle III.

**Fische.** Das Tierreich IV: Fische von Privatdozent Dr. Max Rauther in Gießen. Mit 37 Abbild. Nr. 356.

**Fischerei und Fischzucht** v. Dr. Karl Eckstein, Prof. an der Forstakademie Eberswalde, Abteilungsdirigent bei der Hauptstation des forstlichen Versuchswesens. Nr. 159.

**Formelsammlung, Mathemat.,** u. Repetitorium d. Mathematik, enth. die wichtigsten Formeln und Lehrsätze d. Arithmetik, Algebra, algebraischen Analysis, ebenen Geometrie, Stereometrie, ebenen u. sphärischen Trigonometrie, math. Geographie, analyt. Geometrie d. Ebene u. d. Raumes, d. Different.- u. Integralrechn. v. O. Th. Bürklen, Prof. am Kgl. Realgymn. in Schw.-Gmünd. Mit 18 Fig. Nr. 51.

— **Physikalische,** von G. Mahler, Prof. [illegible]

**Forstwissenschaft** von Dr. Ad. Schwappach, Professor an der Forstakademie Eberswalde, Abteilungsdirigent bei der Hauptstation des forstlichen Versuchswesens. Nr. 106.

**Fremdwort, Das, im Deutschen** von Dr. Rud. Kleinpaul in Leipzig. Nr. 55.

**Fremdwörterbuch, Deutsches,** von Dr. Rud. Kleinpaul in Leipzig. Nr. 273.

**Gardinenfabrikation** siehe: Textil-Industrie II.

**Gaskraftmaschinen, Die,** von Ing. Alfred Kirschke in Halle a. S. Mit 55 Figuren. Nr. 316.

**Genossenschaftswesen, Das, in Deutschland.** Von Dr. Otto Lindecke, Sekretär des Hauptverbandes deutscher gewerblicher Genossenschaften. Nr. 384.

**Geodäsie** von Dr. C. Reinhertz, Prof. an der Techn. Hochschule Hannover. Mit 66 Abbild. Nr. 102.

**Geographie, Astronomische,** von Dr. Siegm. Günther, Prof. an der Techn. Hochschule in München. Mit 52 Abbild. Nr. 92.

— **Physische,** von Dr. Siegm. Günther, Prof. an der Königl. Techn. Hochschule in München. Mit 32 Abbild. Nr. 26.

— s. auch: Landeskunde. — Länderkunde.

**Geologie** in kurzem Auszug für Schulen und zur Selbstbelehrung zusammengestellt von Prof. Dr. Eberh. Fraas in Stuttgart. Mit 16 Abbild. und 4 Taf. mit 51 Fig. Nr. 13.

**Geometrie, Analytische, der Ebene** von Prof. Dr. M. Simon in Straßburg. Mit 57 Fig. Nr. 65.

— — **Aufgabensammlung zur Analytischen Geometrie der Ebene** von O. Th. Bürklen, Prof. am Kgl. Realgymnasium in Schwäb.-Gmünd. Mit 32 Fig. Nr. 256.

— **Analytische, des Raumes** von Prof. Dr. M. Simon in Straßburg. Mit 28 Abbild. Nr. 89.

— — **Aufgabensammlung z. Analyt. Geometrie d. Raumes** von O. Th. Bürklen, Prof. a. Realgymn. i. Schwäb.-Gmünd. M. 8 Fig. Nr. 309.

— **Darstellende,** von Dr. Robert Haußner, Prof. an der Univ. Jena. I. [illegible]

Geometrie, Analyt., Aufgabensammlung z. Analytischen Geometrie der Ebene, von O. Mahler, Prof. am Gymnasium in Ulm. Mit 111 zweifarb. Fig. Nr. 41.

— Projektive, in synthet. Behandlung von Dr. Karl Doehlemann, Professor an der Universität München. Mit 91 Fig. Nr. 72.

Geschichte, Badische, von Dr. Karl Brunner, Prof. am Gymnasium in Pforzheim und Privatdozent der Geschichte an der Techn. Hochschule in Karlsruhe. Nr. 230.

— der Christlichen Balkanstaaten (Bulgarien, Serbien, Rumänien, Montenegro, Griechenland) von Dr. K. Roth in Kempten. Nr. 331.

— Bayerische, von Dr. Hans Ockel in Augsburg. Nr. 160.

— des Byzantinischen Reiches von Dr. K. Roth in Kempten. Nr. 190.

— Deutsche, I: Mittelalter (bis 1519) von Dr. F. Kurze, Prof. am Kgl. Luisengymn. in Berlin. Nr. 33.

— — II: Zeitalter der Reformation und der Religionskriege (1500–1648) von Dr. F. Kurze, Professor am Königl. Luisengymnasium in Berlin. Nr. 34.

— — III: Vom Westfälischen Frieden bis zur Auflösung des alten Reichs (1648—1806) von Dr. F. Kurze, Prof am Kgl. Luisengymnasium in Berlin. Nr. 35.

— — siehe auch: Quellenkunde.

— Englische, von Prof. L. Gerber, Oberlehrer in Düsseldorf. Nr. 375.

— Französische, von Dr. R. Sternfeld, Prof. a. d. Univers. Berlin. Nr. 85.

— Griechische, von Dr. Heinrich Swoboda, Prof. an der deutschen Univers. Prag. Nr. 49.

— des 19. Jahrhunderts v. Oskar Jäger, o. Honorarprofessor an der Univers. Bonn. 1. Bdchn.: 1800–1852. Nr. 216.

— — 2. Bdchn.: 1853 bis Ende d. Jahrh. Nr. 217.

— Israels bis auf die griech. Zeit von Lic. Dr. J. Benzinger. Nr. 231.

Geschichte Lothringens, v. Dr. Hermann Derichsweiler, Geh. Regierungsrat in Straßburg. Nr. 6.

— des alten Morgenlandes von Dr. Fr. Hommel, Prof. a. d. Univers. München. M. 9 Bild. u. 1 Kart. Nr. 43.

— Oesterreichische, I: Von der Urzeit bis zum Tode König Albrechts II. (1439) von Professor Dr. Franz von Krones, neubearbeitet von Dr. Karl Uhlirz, Prof. an der Univ. Graz. Mit 11 Stammtaf. Nr. 104.

— — II: Vom Tode König Albrechts II. bis zum Westfälischen Frieden (1440 bis 1648), von Prof. Dr. Franz von Krones, neubearbeitet von Dr. Karl Uhlirz, Prof. an der Univ. Graz. Mit 3 Stammtafeln. Nr. 105.

— Polnische, v. Dr. Clemens Brandenburger in Posen. Nr. 338.

— Römische, von Realgymnasial-Dir. Dr. Jul. Koch in Grunewald. Nr. 19.

— Russische, v. Dr. Wilh. Reeb, Oberl. am Ostergymnasium in Mainz. Nr. 4.

— Sächsische, von Professor Otto Kaemmel, Rektor des Nikolaigymnasiums zu Leipzig. Nr. 100.

— Schweizerische, von Dr. K. Dändliker, Prof. a. d. Univ. Zürich. Nr. 188.

— Spanische, von Dr. Gustav Diercks. Nr. 266.

— Thüringische, von Dr. Ernst Devrient in Jena. Nr. 352.

— der Chemie siehe: Chemie.

— der Malerei siehe: Malerei.

— der Mathematik s.: Mathematik.

— der Musik siehe: Musik.

— der Pädagogik siehe: Pädagogik.

— der Philologie s.: Philologie.

— der Physik siehe: Physik.

— des deutschen Romans s.: Roman.

— der Seemacht s.: Seemacht.

— der deutschen Sprache siehe: Grammatik, Deutsche.

— des deutschen Unterrichtswesens siehe: Unterrichtswesen.

— des Zeitungswesens s.: Zeitungswesen.

— der Zoologie siehe: Zoologie.

Geschichtswissenschaft, Einleitung in die, von Dr. Ernst Bernheim, Prof. an der Univers. Greifswald. Nr. 270.

**Geschütze, Die modernen, der Fußartillerie.** I: Vom Auftreten der gezogenen Geschütze bis zur Verwendung des rauchschwachen Pulvers 1850—1890 v. Mummenhoff, Major beim Stabe des Fußartillerie-Regiments Generalfeldzeugmeister (Brandenburgisches Nr. 3). Mit 50 Textbildern. Nr. 334.
— — II: Die Entwicklung der heutigen Geschütze der Fußartillerie seit Einführung des rauchschwachen Pulvers 1890 bis zur Gegenwart. Mit 31 Textbildern. Nr. 362.
**Gesetzbuch, Bürgerliches,** siehe: Recht des Bürgerlichen Gesetzbuches.
**Gesundheitslehre.** Der menschliche Körper, sein Bau und seine Tätigkeiten, von E. Rebmann, Oberschulrat in Karlsruhe. Mit Gesundheitslehre von Dr. med. H. Seiler. Mit 47 Abb. u. 1 Taf. Nr. 18.
**Gewerbehygiene** von Dr. E. Roth in Potsdam. Nr. 350.
**Gewerbewesen** von Werner Sombart, Prof. an d. Handelshochschule Berlin. I. II. Nr. 203. 204.
**Gewichtswesen.** Maß-, Münz- und Gewichtswesen von Dr. Aug. Blind, Prof. an der Handelsschule in Köln. Nr. 283.
**Gleichstrommaschine, Die,** von C. Kinzbrunner, Ingenieur und Dozent für Elektrotechnik an der Municipal School of Technology in Manchester. Mit 78 Fig. Nr. 257.
**Gletscherkunde** von Dr. Fritz Machaček in Wien. Mit 5 Abbild. im Text und 11 Taf. Nr. 154.
**Gottfried von Straßburg.** Hartmann von Aue, Wolfram von Eschenbach u. Gottfried von Straßburg. Auswahl aus dem höf. Epos mit Anmerkungen und Wörterbuch von Dr. K. Marold, Prof. am Kgl. Friedrichskollegium zu Königsberg i. Pr. Nr. 22.
**Grammatik, Deutsche,** und kurze Geschichte der deutschen Sprache von Schulrat Professor Dr. O. Lyon in Dresden. Nr. 20.
— **Griechische,** I: Formenlehre von Dr. Hans Meltzer, Prof. an der Klosterschule zu Maulbronn. Nr. 117.
— — II: Bedeutungslehre und Syntax von Dr. Hans Meltzer, Prof. an der Klosterschule zu Maulbronn. Nr. 118.
**Grammatik, Lateinische.** Grundriß der lateinischen Sprachlehre von Prof. Dr. W. Votsch in Magdeburg. Nr. 82.
— **Mittelhochdeutsche.** Der Nibelunge Nôt in Auswahl und mittelhochdeutsche Grammatik mit kurzem Wörterbuch von Dr. W. Golther, Prof. an der Univers. Rostock. Nr. 1.
— **Russische,** von Dr. Erich Berneker, Prof. an der Univers. Prag. Nr. 66.
— — siehe auch: Russisches Gesprächsbuch. — Lesebuch.
**Handelskorrespondenz, Deutsche,** von Prof. Th. de Beaux, Officier de l'Instruction Publique. Nr. 182.
— **Englische,** von E. E. Whitfield, M. A., Oberlehrer an King Edward VII Grammar School in King's Lynn. Nr. 237.
— **Französische,** von Professor Th. de Beaux, Officier de l'Instruction Publique. Nr. 183.
— **Italienische,** von Prof. Alberto de Beaux, Oberlehrer am Kgl. Institut S. S. Annunziata in Florenz. Nr. 219.
— **Russische,** von Dr. Theodor von Kawraysky in Leipzig. Nr. 315.
— **Spanische,** von Dr. Alfredo Nadal de Mariezcurrena. Nr. 295.
**Handelspolitik, Auswärtige,** von Dr. Heinr. Sieveking, Prof. an der Univers. Marburg. Nr. 245.
**Handelswesen, Das,** von Geh. Oberregierungsrat Dr. Wilh. Lexis, Prof. a. d. Univers. Göttingen. I: Das Handelspersonal und der Warenhandel. Nr. 296.
— — II: Die Effektenbörse und die innere Handelspolitik. Nr. 297.
**Handfeuerwaffen, Die Entwicklung der,** seit der Mitte des 19. Jahrhunderts und ihr heutiger Stand von G. Wrzodek, Oberleutnant im Infanterie-Regiment Freiherr Hiller von Gärtringen (4. Posensches) Nr. 59 und Assistent der Königl. Gewehr-Prüfungskommission. Mit 21 Abb. Nr. 366.
**Harmonielehre** von A. Halm. Mit vielen Notenbeilagen. Nr. 120.
**Hartmann von Aue, Wolfram von Eschenbach und Gottfried von Straßburg.** Auswahl aus dem höfischen Epos mit Anmerkungen und Wörterbuch von Dr. K. Marold, Prof. am Königlichen Friedrichskollegium zu Königsberg i. Pr. Nr. 22.

**Literaturdenkmäler des 16. Jahrhunderts III: Von Brant bis Rollenhagen: Brant, Hutten, Fischart, sowie Tierepos und Fabel.** Ausgewählt und erläutert von Prof. Dr. Julius Sahr. Nr. 36.

— **Deutsche, des 17. und 18. Jahrhunderts** von Dr. Paul Legband in Berlin. Erster Teil. Nr. 364.

**Literaturen, Die, des Orients.** I. Teil: Die Literaturen Ostasiens und Indiens v. Dr. M. Haberlandt, Privatdozent an der Univers. Wien. Nr. 162.

— II. Teil: Die Literaturen der Perser, Semiten und Türken, von Dr. M. Haberlandt, Privatdozent an der Univers. Wien. Nr. 163.

**Literaturgeschichte, Deutsche,** von Dr. Max Koch, Professor an der Univers. Breslau. Nr. 31.

— **Deutsche, der Klassikerzeit** von Carl Weitbrecht, Prof. an der Techn. Hochschule Stuttgart. Nr. 161.

— **Deutsche, des 19. Jahrhunderts** v. Carl Weitbrecht, Prof. an d. Techn. Hochschule Stuttgart, neubearb. von Dr. Rich. Weitbrecht in Wimpfen. I. II. Nr. 134. 135.

— **Englische,** von Dr. Karl Weiser in Wien. Nr. 69.

— — Grundzüge und Haupttypen der englischen Literaturgeschichte von Dr. Arnold M. M. Schröer, Prof. an der Handelshochschule in Köln. 2 Teile. Nr. 286. 287.

— **Griechische,** mit Berücksichtigung der Geschichte der Wissenschaften von Dr. Alfred Gercke, Prof. an der Univers. Greifswald. Nr. 70.

— **Italienische,** von Dr. Karl Voßler, Prof. a. d. Univ. Heidelberg. Nr. 125.

— **Nordische,** I. Teil: Die isländische und norwegische Literatur des Mittelalters von Dr. Wolfgang Golther, Prof. an d. Univers. Rostock. Nr. 254.

— **Portugiesische,** von Dr. Karl von Reinhardstoettner, Prof. an der Kgl. Techn. Hochschule München. Nr. 213.

— **Römische,** von Dr. Hermann Joachim in Hamburg. Nr. 52.

— **Russische,** von Dr. Georg Polonskij in München. Nr. 166.

— **Slavische,** von Dr. Josef Karásek in Wien. 1. Teil: Ältere Literatur bis zur Wiedergeburt. Nr. 277.

— — 2. Teil: Das 19. Jahrh. Nr. 278.

**Literaturgeschichte, Spanische,** von Dr. Rudolf Beer in Wien. I. II. Nr. 167. 168.

**Logarithmen.** Vierstellige Tafeln und Gegentafeln für logarithmisches und trigonometrisches Rechnen in zwei Farben zusammengestellt von Dr. Hermann Schubert, Prof. an der Gelehrtenschule des Johanneums in Hamburg. Nr. 81.

**Logik.** Psychologie und Logik zur Einführung in die Philosophie v. Dr. Th. Elsenhans. Mit 13 Fig. Nr. 14.

**Luther, Martin, Thom. Murner und das Kirchenlied des 16. Jahrhunderts.** Ausgewählt und mit Einleitungen und Anmerkungen versehen von Prof. G. Berlit, Oberlehrer am Nikolaigymnasium zu Leipzig. Nr. 7.

**Magnetismus.** Theoretische Physik III. Teil: Elektrizität und Magnetismus. Von Dr. Gustav Jäger, Prof. an der Univers. Wien. Mit 33 Abbild. Nr. 78.

**Malerei, Geschichte der, I. II. III. IV. V.** von Dr. Rich. Muther, Prof. an d. Univers. Breslau. Nr. 107—111.

**Mälzerei.** Brauereiwesen I: Mälzerei von Dr. P. Dreverhoff, Direktor der Öffentl. u. I. Sächs. Versuchsstat. für Brauerei u. Mälzerei, sow. d. Brauer- u. Mälzerschule zu Grimma. Nr. 303.

**Maschinenelemente, Die.** Kurzgefaßtes Lehrbuch mit Beispielen für das Selbststudium und den prakt. Gebrauch von Fr. Barth, Oberingenieur in Nürnberg. Mit 86 Fig. Nr. 3.

**Maßanalyse** von Dr. Otto Röhm in Stuttgart. Mit 14 Fig. Nr. 221.

**Maß-, Münz- und Gewichtswesen** von Dr. August Blind, Prof. an der Handelsschule in Köln. Nr. 283.

**Materialprüfungswesen.** Einführ. i. d. mod. Technik d. Materialprüfung von K. Memmler, Diplomingenieur. Ständ. Mitarbeiter a. Kgl. Material-Prüfungsamte zu Groß-Lichterfelde. I: Materialeigenschaften. — Festigkeitsversuche. — Hilfsmittel f. Festigkeitsversuche. Mit 58 Fig. Nr. 311.

— — II: Metallprüfung u. Prüfung v. Hilfsmaterialien d. Maschinenbaues. — Baumaterialprüfung. — Papierprüfung. — Schmiermittelprüfung. — Einiges über Metallographie. Mit 31 Fig. Nr. 312.

**Mathematik, Geschichte der,** von Dr. A. Sturm, Professor am Obergymnasium in Seitenstetten. Nr. 226.

**Mechanik.** Theoret. Physik I. Teil: Mechanik und Akustik. Von Dr. Gustav Jäger, Prof. an der Univ. Wien. Mit 19 Abbild. Nr. 76.

**Meereskunde, Physische,** von Dr. Gerhard Schott, Abteilungsvorsteher an der Deutschen Seewarte in Hamburg. Mit 28 Abbild. im Text und 8 Taf. Nr. 112.

**Messungsmethoden, Physikalische** v. Dr. Wilhelm Bahrdt, Oberlehrer an der Oberrealschule in Groß-Lichterfelde. Mit 49 Fig. Nr. 301.

**Metalle** (Anorganische Chemie 2. Teil) v. Dr. Oskar Schmidt, dipl. Ingenieur, Assistent an der Königl. Baugewerkschule in Stuttgart. Nr. 212.

**Metalloide** (Anorganische Chemie 1. Teil) von Dr. Oskar Schmidt, dipl. Ingenieur, Assistent an der Kgl. Baugewerkschule in Stuttgart. Nr. 211.

**Metallurgie** von Dr. Aug Geitz, diplom. Chemiker in München, I. II. Mit 21 Fig. Nr. 313. 314.

**Meteorologie** von Dr. W. Trabert, Prof. an der Univers. Innsbruck. Mit 49 Abbild. und 7 Taf. Nr. 54.

**Militärstrafrecht** von Dr. Max Ernst Mayer, Prof. an der Universität Straßburg i. E. 2 Bände. Nr. 371, 372.

**Mineralogie** von Dr. R. Brauns, Prof. an der Univers. Bonn. Mit 130 Abbild. Nr. 29.

**Minnesang und Spruchdichtung.** Walther von der Vogelweide mit Auswahl aus Minnesang und Spruchdichtung. Mit Anmerkungen und einem Wörterbuch von Otto Güntter, Prof. an der Oberrealschule und an der Techn. Hochschule in Stuttgart. Nr. 23.

**Morphologie, Anatomie u. Physiologie der Pflanzen.** Von Dr. W. Migula, Prof. a. d. Forstakademie Eisenach. Mit 50 Abbild. Nr. 141.

**Münzwesen.** Maß-, Münz- und Gewichtswesen von Dr. Aug. Blind, Prof. an der Handelsschule in Köln. Nr. 283.

**Murner, Thomas.** Martin Luther, Thomas Murner und das Kirchenlied des 16. Jahrh. Ausgewählt und mit Einleitungen und Anmerkungen versehen von Prof. G. Berlit, Oberl. am Nikolaigymn. zu Leipzig. Nr. 7.

**Musik, Geschichte der alten und mittelalterlichen,** von Dr. A. Möhler in Pfrungen. Zwei Bändchen. Mit zahlreichen Abbild. und Musikbeilagen. Nr. 121 und 347.

**Musikalische Formenlehre (Kompositionslehre)** v. Stephan Krehl. I. II. Mit vielen Notenbeispielen. Nr. 149. 150.

**Musikästhetik** von Dr. Karl Grunsky in Stuttgart. Nr. 344.

**Musikgeschichte des 17. und 18. Jahrhunderts** von Dr. K. Grunsky in Stuttgart. Nr. 239.

— **des 19. Jahrhunderts** von Dr. K. Grunsky in Stuttgart. I. II. Nr. 164. 165.

**Musiklehre, Allgemeine,** v. Stephan Krehl in Leipzig. Nr. 220.

**Mythologie, Germanische,** von Dr. Eugen Mogk, Prof. an der Univers. Leipzig. Nr. 15.

— **Griechische und römische,** von Dr. Herm. Steuding, Prof. am Kgl. Gymnasium in Wurzen. Nr. 27.

— siehe auch: Heldensage.

**Nadelhölzer, Die,** von Dr. F. W. Neger, Prof. an der Kgl. Forstakad. zu Tharandt. Mit 85 Abb., 5 Tab. und 3 Karten. Nr. 355.

**Nautik.** Kurzer Abriß des täglich an Bord von Handelsschiffen angewandten Teils der Schiffahrtskunde. Von Dr. Franz Schulze, Direktor der Navigations-Schule zu Lübeck. Mit 56 Abbild. Nr. 84.

**Nibelunge, Der, Nôt** in Auswahl und Mittelhochdeutsche Grammatik m. kurz. Wörterbuch v. Dr. W. Golther Prof. an der Univ. Rostock. Nr. 1.

— — siehe auch: Leben, Deutsches, im 12. Jahrhundert.

**Nutzpflanzen** von Prof. Dr. J. Behrens, Vorst. d. Großh. landwirtschaftl. Versuchsanst. Augustenberg. Mit 53 Fig. Nr. 123.

**Pädagogik** im Grundriß von Prof. Dr. W. Rein, Direktor des Pädagog. Seminars an der Univ. Jena. Nr. 12.

— **Geschichte der**, von Oberlehrer Dr. H. Weimer in Wiesbaden. Nr. 145.

**Paläontologie** v. Dr. Rud. Hoernes, Prof. an der Univ. Graz. Mit 87 Abbild. Nr. 95.

**Parallelperspektive.** Rechtwinklige und schiefwinklige Axonometrie von Prof. J. Vonderlinn in Münster. Mit 121 Fig. Nr. 260.

**Perspektive** nebst einem Anhang üb. Schattenkonstruktion und Parallelperspektive von Architekt Hans Freyberger, Oberl. an der Baugewerkschule Köln. Mit 88 Abbild. Nr. 57.

**Petrographie** von Dr. W. Bruhns, Prof. a. d. Univers. Straßburg i. E. Mit 15 Abbild. Nr. 173.

**Pflanze, Die,** ihr Bau und ihr Leben von Oberlehrer Dr. E. Dennert. Mit 96 Abbild. Nr. 44.

**Pflanzenbiologie** von Dr. W. Migula, Prof. a. d. Forstakademie Eisenach. Mit 50 Abbild. Nr. 127.

**Pflanzenkrankheiten** v. Dr. Werner Friedr. Bruck, Privatdozent in Gießen. Mit 1 farb. Taf. u. 45 Abbild. Nr. 310.

**Pflanzen-Morphologie, -Anatomie und -Physiologie** von Dr. W. Migula, Prof. an der Forstakad. Eisenach. Mit 50 Abbild Nr. 141.

**Pflanzenreich, Das.** Einteilung des gesamten Pflanzenreichs mit den wichtigsten und bekanntesten Arten von Dr. F. Reinecke in Breslau und Dr. W. Migula, Prof. an der Forstakad. Eisenach. Mit 50 Fig. Nr. 122.

**Pflanzenwelt, Die, der Gewässer** von Dr. W. Migula, Prof. an der Forstakademie Eisenach. Mit 50 Abbild. Nr. 158.

**Pharmakognosie.** Von Apotheker F. Schmitthenner, Assistent am Botan. Institut der Technischen Hochschule Karlsruhe. Nr. 251.

**Philologie, Geschichte der klassischen,** von Dr. Wilh. Kroll, ord. Prof. an der Universität Münster in Westfalen. Nr. 367.

**Philosophie, Einführung in die,** von Dr. Max Wentscher, Prof. a. d. Univers. Königsberg. Nr. 281.

— Psychologie und Logik zur Einführ. in die Philosophie von Dr. Th. Elsenhans. Mit 13 Fig. Nr. 14.

**Photographie, Die.** Von H. Keßler, Prof. an der k. k. Graphischen Lehr- und Versuchsanstalt in Wien. Mit 4 Taf. und 52 Abbild. Nr. 94.

**Physik, Theoretische,** von Dr. Gustav Jäger, Prof. der Physik an der Technischen Hochschule in Wien. I. Teil: Mechanik und Akustik. Mit 19 Abbild. Nr. 76.

— — II. Teil: Licht und Wärme. Mit 47 Abbild. Nr. 77.

— — III. Teil: Elektrizität und Magnetismus. Mit 33 Abbild. Nr. 78.

— — IV. Teil: Elektromagnetische Lichttheorie und Elektronik. Mit 21 Fig. Nr. 374.

— **Geschichte der,** von A. Kistner, Prof. an der Großh. Realschule zu Sinsheim a. E. I: Die Physik bis Newton. Mit 13 Fig. Nr. 293.

— — II: Die Physik von Newton bis zur Gegenwart. Mit 3 Fig. Nr. 294.

**Physikalische Aufgabensammlung** von G. Mahler, Prof. d. Mathem. u. Physik am Gymnasium in Ulm. Mit den Resultaten. Nr. 243.

**Physikalische Formelsammlung** von G. Mahler, Prof. am Gymnasium in Ulm. Mit 65 Fig. Nr. 136.

**Physikalische Messungsmethoden** v. Dr. Wilhelm Bahrdt, Oberlehrer an der Oberrealschule in Groß-Lichterfelde. Mit 49 Fig. Nr 301.

**Plastik, Die, des Abendlandes** von Dr. Hans Stegmann, Konservator am German. Nationalmuseum zu Nürnberg. Mit 23 Taf. Nr. 116.

— **des 19. Jahrhunderts** von A. Heilmeyer in München. Mit 41 Vollbildern. Nr. 321.

**Poetik, Deutsche,** von Dr. K. Borinski, Prof. a. d. Univ. München. Nr. 40.

**Posamentiererei** siehe: Textil-Industrie II.

**Psychologie und Logik** zur Einführ. in die Philosophie, von Dr. Th. Elsenhans. Mit 13 Fig. Nr. 14.

**Psychophysik, Grundriß der,** von Dr. G. F. Lipps in Leipzig. Mit 3 Fig. Nr. 98.

**Pumpen, hydraulische und pneumatische Anlagen.** Ein kurzer Überblick von Regierungsbaumeister Rudolf Vogdt, Oberlehrer an der kgl. höheren Maschinenbauschule in Posen. Mit zahlr. Abbild. Nr. 290.

**Quellenkunde zur deutschen Geschichte** von Dr. Carl Jacob, Prof. an der Univers. Tübingen. 2 Bde. Nr. 279. 280.

**Radioaktivität** von Chemiker Wilh. Frommel. Mit 18 Abbild. Nr. 317.

**Rechnen, Kaufmännisches,** von Richard Just, Oberlehrer an der Öffentlichen Handelslehranstalt der Dresdener Kaufmannschaft. I. II. III. Nr. 139. 140. 187.

**Recht d. Bürgerlich. Gesetzbuches.** Zweites Buch: Schuldrecht. I. Abteilung: Allgemeine Lehren von Dr. Paul Oertmann, Professor an der Universität Erlangen. Nr. 323.

— — II. Abteilung: Die einzelnen Schuldverhältnisse v. Dr. Paul Oertmann, Professor an der Universität Erlangen. Nr. 324.

— Viertes Buch: Familienrecht von Dr. Heinrich Titze, Prof. an der Univers. Göttingen. Nr. 305.

**Rechtslehre, Allgemeine,** von Dr. Th. Sternberg, Privatdoz. an der Univers. Lausanne. I: Die Methode. Nr. 169.

— II: Das System. Nr. 170.

**Rechtsschutz, Der internationale gewerbliche,** von J. Neuberg, Kaiserl. Regierungsrat, Mitglied des Kaiserl. Patentamts zu Berlin. Nr. 271.

**Redelehre, Deutsche,** v. Hans Probst, Gymnasialprof. in Bamberg. Mit einer Taf. Nr. 61.

**Redeschrift** siehe: Stenographie.

**Religionsgeschichte, Alttestamentliche,** von D. Dr. Max Löhr, Prof. an der Univers. Breslau. Nr. 292.

— **Indische,** von Prof. Dr. Edmund Hardy. Nr. 83.

— — siehe auch Buddha.

**Religionswissenschaft, Abriß der vergleichenden,** von Prof. Dr. Th. Achelis in Bremen. Nr. 208.

**Renaissance.** Die Kultur d. Renaissance. Gesittung, Forschung, Dichtung von Dr. Robert F. Arnold, Privatdoz. an der Univ. Wien. Nr. 189.

**Reptilien** siehe: Tierreich III.

**Roman.** Geschichte d. deutschen Romans von Dr. Hellmuth Mielke. Nr. 229.

**Russisch-Deutsches Gesprächsbuch** von Dr. Erich Berneker, Prof. an der Univers. Prag. Nr. 68.

**Russisches Lesebuch** mit Glossar von Dr. Erich Berneker, Prof. an der Univers. Prag. Nr. 67.

— — siehe auch: Grammatik.

**Sachs, Hans.** Ausgewählt und erläutert von Prof. Dr. Julius Sahr. Nr. 24.

**Säugetiere.** Das Tierreich I: Säugetiere von Oberstudienrat Prof. Dr. Kurt Lampert, Vorsteher des Kgl. Naturalienkabinetts in Stuttgart. Mit 15 Abbild. Nr. 282.

**Schattenkonstruktionen** v. Prof. J. Vonderlinn in Münster. Mit 114 Fig. Nr. 236.

**Schmarotzer u. Schmarotzertum in der Tierwelt.** Erste Einführung in die tierische Schmarotzerkunde v. Dr. Franz v. Wagner, a. o. Prof. a. d. Univers. Graz. Mit 67 Abbild. Nr. 151.

**Schule, Die deutsche, im Auslande,** von Hans Amrhein, Direktor der deutschen Schule in Lüttich. Nr. 259.

**Schulpraxis.** Methodik der Volksschule von Dr. R. Seyfert, Seminardirektor in Zschopau. Nr. 50.

**Seemacht, Die, in der deutschen Geschichte** von Wirkl. Admiralitätsrat Dr. Ernst von Halle, Prof. an der Universität Berlin. Nr. 370.

**Seerecht, Das deutsche,** von Dr. Otto Brandis, Oberlandesgerichtsrat in Hamburg. I. Allgemeine Lehren: Personen und Sachen des Seerechts. Nr. 386.

— — II. Die einzelnen seerechtlichen Schuldverhältnisse: Verträge des Seerechts und außervertragliche Haftung. Nr. 387.

**Textil-Industrie III:** Wäscherei, Bleicherei, Färberei und ihre Hilfsstoffe von Dr. Wilh. Massot, Lehrer an der Preuß. höh. Fachschule für Textilindustrie in Krefeld. Mit 28 Fig. Nr. 186.

**Thermodynamik** (Technische Wärmelehre) v. K. Walther u M. Röttinger, Dipl.-Ingenieuren. M. 54 Fig. Nr. 242.

**Tierbiologie** siehe: Biologie d. Tiere.

**Tiere** siehe auch: Entwicklungsgeschichte.

**Tiergeographie** von Dr. Arnold Jacobi, Prof. der Zoologie an der Kgl. Forstakademie zu Tharandt. Mit 2 Karten. Nr. 218.

**Tierkunde** v. Dr. Franz v. Wagner, Prof. an der Univers. Graz. Mit 78 Abbild. Nr. 60.

**Tierreich, Das, I:** Säugetiere von Oberstudienrat Prof. Dr. Kurt Lampert, Vorsteher des Kgl. Naturalienkabinetts in Stuttgart. Mit 15 Abbild. Nr. 282.

— — III: Reptilien und Amphibien. Von Dr. Franz Werner, Privatdozent an der Univ. Wien. Mit 48 Abbild. Nr. 383.

— — IV: Fische von Privatdozent Dr. Max Rauther in Gießen Nr. 356.

**Tierzuchtlehre,** Allgemeine u. spezielle, v Dr. Paul Rippert in Berlin. Nr. 228.

**Trigonometrie, Ebene und sphärische,** von Dr. Gerh. Hessenberg, Privatdoz. an der Techn. Hochschule in Berlin. Mit 70 Fig. Nr. 99.

**Unterrichtswesen, Das öffentliche, Deutschlands i. d. Gegenwart** von Dr. Paul Stötzner, Gymnasialoberlehrer in Zwickau. Nr. 130.

— **Geschichte des deutschen Unterrichtswesens** von Prof. Dr. Friedrich Seiler, Direktor des Kgl. Gymnasiums zu Luckau. I. Teil: Von Anfang an bis zum Ende des 18. Jahrhunderts. Nr. 275.

— — II. Teil: Vom Beginn d. 19. Jahrh. bis auf die Gegenwart. Nr. 276.

**Urgeschichte der Menschheit** v. Dr. Moriz Hoernes, Prof. an der Univ. Wien. Mit 53 Abbild. Nr. 42.

**Urheberrecht, Das,** an Werken der Literatur und der Tonkunst, das Verlagsrecht und das Urheberrecht an Werken der bildenden Künste und Photographie von Staatsanwalt Dr. J. Schlittgen in Chemnitz. Nr. 361.

**Urheberrecht, Das deutsche,** an literarischen, künstlerischen u. gewerblichen Schöpfungen, mit besonderer Berücksichtigung der internationalen Verträge von Dr. Gustav Rauter, Patentanwalt in Charlottenburg. Nr. 263.

**Vektoranalysis** v. Dr. Siegfr. Valentiner, Privatdozent am Phys. Institut d. Technischen Hochschule in Hannover. Mit 11 Fig. Nr. 354.

**Veranschlagen, Das, im Hochbau.** Kurzgefaßtes Handbuch über das Wesen des Kostenanschlags von Emil Beutinger, Architekt BDA, Assistent an der Techn. Hochschule in Darmstadt. Mit vielen Figuren. Nr. 385.

**Versicherungsmathematik** von Dr. Alfred Loewy, Prof. an der Univ. Freiburg i. B. Nr. 180.

**Versicherungswesen, Das,** von Dr. iur. Paul Moldenhauer, Dozent der Versicherungswissenschaft an der Handelshochschule Köln. Nr. 262.

**Völkerkunde** von Dr. Michael Haberlandt, k. u. k. Kustos der ethnogr. Sammlung des naturhistor. Hofmuseums u Privatdoz. an d. Univers. Wien. Mit 56 Abbild. Nr. 73.

**Volksbibliotheken** (Bücher- u. Lesehallen), ihre Einrichtung und Verwaltung von Emil Jaeschke, Stadtbibliothekar in Elberfeld. Nr. 332.

**Volkslied, Das deutsche,** ausgewählt und erläutert von Prof. Dr. Jul. Sahr. 1. Bändchen Nr. 25.

— — 2. Bändchen. Nr. 132.

**Volkswirtschaftslehre** v. Dr. Carl Johs. Fuchs, Prof. an der Univers. Freiburg i. B. Nr. 133.

**Volkswirtschaftspolitik** von Präsident Dr. R. van der Borght in Berlin. Nr. 177.

**Waltharilied, Das,** im Versmaße der Urschrift übersetzt und erläutert von Prof. Dr. H. Althof, Oberlehrer a. Realgymnasium i. Weimar. Nr. 46.

**Walther von der Vogelweide** mit Auswahl aus Minnesang u. Spruchdichtung. Mit Anmerkungen und einem Wörterbuch von Otto Güntter, Prof. a. d. Oberrealschule und a. d. Techn. Hochsch. in Stuttgart. Nr. 23.

**Warenkunde**, von Dr. Karl Hassack, Professor u. Leiter der k. k. Handelsakademie in Graz. I. Teil: Unorganische Waren. Mit 40 Abbild. Nr. 222.

— II. Teil: Organische Waren. Mit 36 Abbild. Nr. 223.

**Warenzeichenrecht, Das.** Nach dem Gesetz zum Schutz der Warenbezeichnungen vom 12. Mai 1894. Von Regierungsrat J. Neuberg, Mitglied des Kaiserl. Patentamts zu Berlin. Nr. 360.

**Wärme.** Theoretische Physik II. Teil: Licht und Wärme. Von Dr. Gustav Jäger, Prof. an der Univers. Wien. Mit 47 Abbild. Nr. 77.

**Wärmelehre, Technische, (Thermodynamik)** von K. Walther u. M. Röttinger, Dipl.-Ingenieure. Mit 54 Fig. Nr. 242.

**Wäscherei** siehe: Textil-Industrie III.

**Wa**[illegible] in [illegible] E[illegible] M[illegible]

**Web**[illegible]

**Wet**[illegible] R[illegible] m[illegible]

**Wir**[illegible]

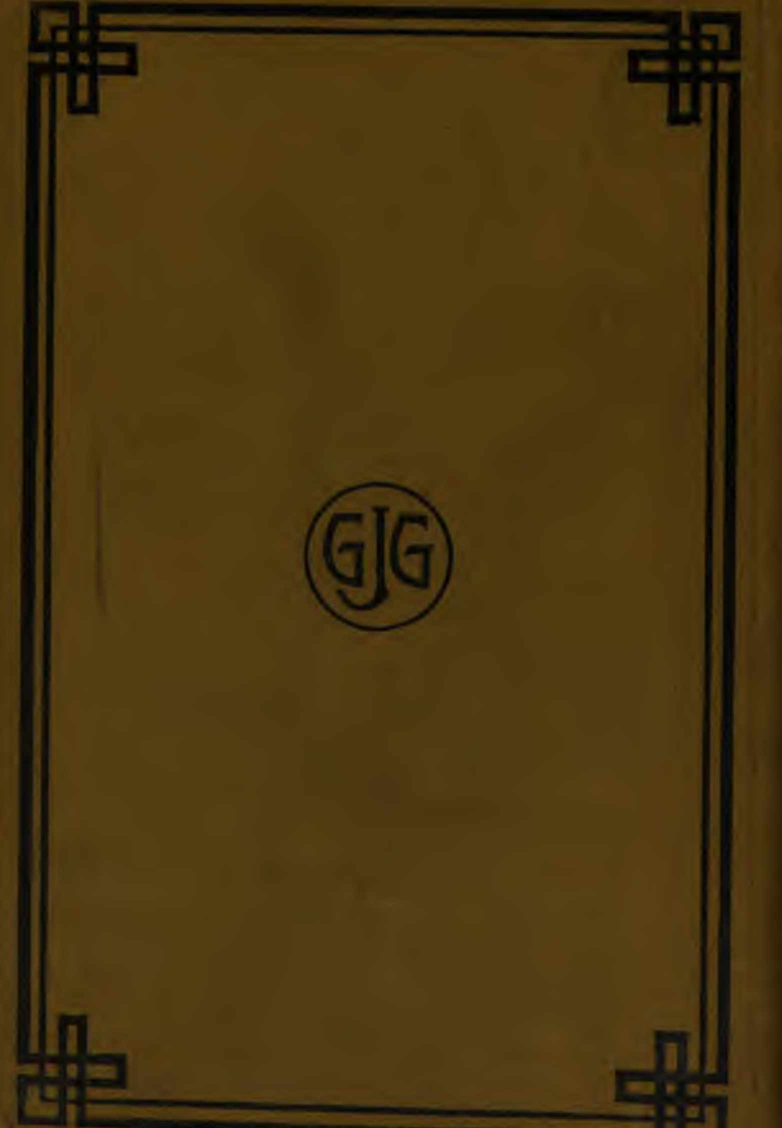
**Wolfram von Eschenbach.** Hartmann v. Aue, Wolfram v. Eschenbach und Gottfried von Straßburg. Auswahl aus dem höf. Epos mit Anmerkungen u. Wörterbuch v. Dr. K. Marold, Prof. am Kgl. Friedrichskolleg. z. Königsberg i. Pr. Nr. 22.

**Wörterbuch** nach der neuen deutschen Rechtschreibung von Dr. Heinrich Klenz. Nr. 200.

— **Deutsches**, von Dr. Ferd. Detter, Prof. an d. Universität Prag. Nr. 64.

**Zeichenschule** von Prof. K. Kimmich in Ulm. Mit 18 Taf. in Ton-, Farben- und Golddruck u. 200 Voll- und Textbildern. Nr. 39.

**Zeichnen, Geometrisches**, von H. Becker, Architekt und Lehrer an der Baugewerkschule in Magdeburg, neu bearbeitet von Professor J. Vonderlinn, Direktor der königl. Baugewerkschule zu Münster. Mit 290 Fig. und 23 Tafeln im Text. Nr. 58.


GJG